

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה והסתברות .  
הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה,  
המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את  
התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם  
רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי  
שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים  
שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים  
להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם  
לחויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר  
[www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול זה בול. בשבילך!**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

## תוכן

4	פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות
9	פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים
20	פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה
24	פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה
28	פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים
31	פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא התזרה ועם התזרה
34	פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא התזרה
38	פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם התזרה
43	פרק 9 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות
52	פרק 10 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחד
55	פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחד
59	פרק 12 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה
65	פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות
69	פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות
75	פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות
79	פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן
83	פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית
87	פרק 18 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים
90	פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית
95	פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית
99	פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה
102	פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית
106	פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית
109	פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית
112	פרק 25 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות
120	פרק 26 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)
130	פרק 27 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית
134	פרק 28 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה
137	פרק 29 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית
146	פרק 30 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף
149	פרק 31 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת
154	פרק 32 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים
160	פרק 33 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות
163	פרק 34 - משתנה דו ממדי בדיד - שאלות מסכמות

171	פרק 35 - קומבינציות לינאריות להתפלגות גורמאלית
174	פרק 36 - פונקציה יוצרת מומנטים
179	פרק 37 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים
183	פרק 38 - נוסחת התוחלת השלמה
186	פרק 39 - משתנה מקרי דו ממדי רציף
201	פרק 40 - קונבולוציה
206	פרק 41 - הסקה סטטיסטית - הקדמה
209	פרק 42 - מערכות חשמליות
215	פרק 43 - התפלגות מינימום ומקסימום
219	פרק 44 - התפלגות הדגימה
247	פרק 45 - אי שוויונים הסתברותיים
250	פרק 46 - אמידה נקודתית
258	אומד נראות מקסימלית
287	פרק 47 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)
303	פרק 48 - רווח סמך להפרש תוחלות ממדגמים בלתי תלויים
309	פרק 49 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
341	פרק 50 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים
349	פרק 51 - מבחני טיב ההתאמה

## פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות

### רקע :

**ניסוי מקרי :** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.

למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים .

**מרחב מדגם :** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה :  $\{1,2,3,4,5,6\}$ .

מזג האוויר בעוד שבועיים :  $\{ \text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביד} \}$

**מאורע :** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות :  $A, B, C, \dots$

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

**גודל מרחב המדגם :** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה :  $|\Omega| = 6$

**גודל המאורע :** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה :  $|A| = 2$        $|B| = 3$

**מאורע משלים :** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה :  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$        $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

**מרחב מדגם אחיד ( סימטרי ) :** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד :**

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה :  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד :**

יחושב לפי השכיחות היחסית :  $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

**הסתברות למאורע משלים :**

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

**תרגילים:**

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכב את כל המילים האפשריות.
  - רשום את המקרים למאורע:  
A - במילה נמצאת האות E.  
B - במילה האותיות שונות.  
ג. רשום את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
  - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:  
A - סכום התוצאות 7.  
C - מכפלת התוצאות 12.  
ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
  - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
  - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
  - מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
  - מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

- א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

**פתרונות:****שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$

**שאלה 3**

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

**שאלה 4**

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32



## פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

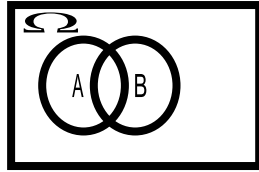
רקע:

פעולת חיתוך:

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך:

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$

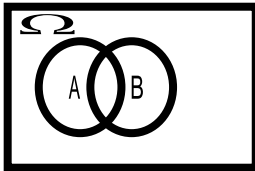
לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד:

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא:  $A \cup B$  נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

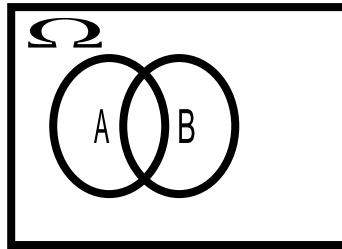
דוגמה ( הפתרון נמצא בהקלטה )

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

- א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?  
 ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?  
 ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

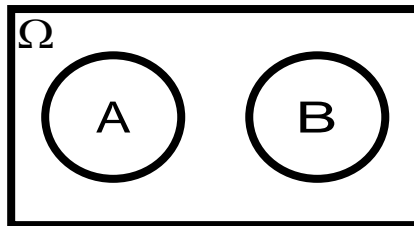
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

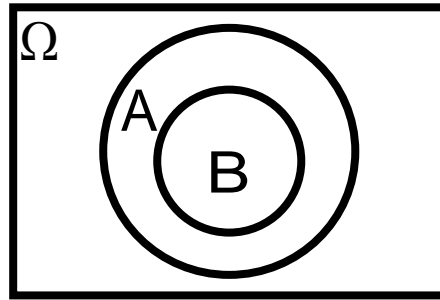
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad \text{לקבל לפחות 5 :}$$

$$B = \{3\} \quad \text{לקבל 3 :}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :

-E במילה נמצאת האות E.

-F במילה אותיות שונות.

א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.

ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :

-A לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.

-B לעבור את המבחן בכלכלה.

העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :

א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.

ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.

ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.

ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.

ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.

ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.

א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :

$$A =$$

$$B =$$

$$\bar{B} =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- $\Omega$  את מרחב המדגם וב- $\phi$  קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .  
 קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :

$A$  = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

$B$  = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

=  
ה.  $\bar{A}$

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

$A$  - אדם דובר עברית.

B- אדם דובר ערבית.

C- אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A- בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B- סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C- מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

- א. האם A ו-B מאורעות זרים?
- ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?
- ג. האם A ו-C מאורעות זרים?
- ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

- א. האם A ו-B מאורעות זרים?
- ב. חשב את  $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

- A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.
- B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.  
איזו טענה נכונה?
- א. A ו-B מאורעות זרים.
- ב. A ו-B מאורעות משלימים.
- ג. B מכיל את A.
- ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

- א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?
- ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

.14



$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל-  $P(A \cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א.  $A \cap B = B \cap A$

ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש  $P(A) = 0.3$  ו-  $P(B) = 0.2$

א. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.4$  ?

ב. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.6$  ?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבון בבנק הפועלים. ל- 28% חשבון בבנק לאומי ול- 15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-

- 5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.
- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20. הוכח:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

21. A ו-B מאורעות במרחב המדגם האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא:  $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

**פתרונות:****שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

**שאלה 8**

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

**שאלה 9**

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

**שאלה 10**

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

**שאלה 11**

א. כן

ב. 0.3

**שאלה 12**

התשובה הנכונה ג

**שאלה 13**

א. 0.05

ב. 0.95

**שאלה 14**

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

**שאלה 18**

א. 0.19

ב. 0.05

ג. 0.31

ד. 0.46

ה. 0.12

ו. 0.41

ז. 0.59

### פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

#### רקע:

#### כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודלו של מרחב המדגם.

אם לתהליך יש  $k$  שלבים :  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון ,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני ...  $n_k$

אפשרויות לשלב  $k$  :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה :  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? ( הסבר בהקלטה)

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלי והיתר

ספרות? (הסבר בהקלטה)

### תרגילים:

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
  - א. הטלת קובייה פעמים.
  - ב. מספר תלת ספרתי.
  - ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
  - ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
  
2. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטרקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
  - א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
    1. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
    2. בארוחה סלט, לזניה ותה.
  
3. בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
  - א. המספר הוא זוגי.
  - ב. במספר כל הספרות שונות.
  - ג. במספר כל הספרות זהות.
  - ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
  - ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
  - ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באותה צורה).
  
4. חמישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבנין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
  - א. כולם ירדו בקומה החמישית?
  - ב. כולם ירדו באותה קומה?
  - ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
  - ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות?

5. במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
6. מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות של התוצאות תהינה שונות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
7. יש ליצור מילה בת חמש אותיות לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות) בת 5 אותיות.
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו L?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום ( מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
8. יוצרים קוד עם a ספרות ( מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a)
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
9. במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימון V או בסימון X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

פתרונות :שאלה 2

- א. 36  
 ב.  $1/36$   
 ג.  $1/9$

שאלה 1

- א. 36  
 ב. 900  
 ג. 70  
 ד. 90

שאלה 4

- א. 0.00003  
 ב. 0.00024  
 ג. 0.20508  
 ד. 0.01047

שאלה 3

- א. 0.5  
 ב. 0.3024  
 ג. 0.0001  
 ד. 0.9999  
 ה. 0.6976  
 ו. 0.01

שאלה 6

- א.  $1/216$   
 ב.  $5/18$   
 ג.  $13/18$   
 ד.  $215/216$

שאלה 5

- א. 3,375  
 ב. 2,730

שאלה 9

א.  $2^n$

שאלה 7

- א. 0.5417  
 ב.  $\frac{1}{26^4}$   
 ד. 0.0015

**פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה**

**רקע:**

**תמורה:**

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים בשורה:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1 \text{ הערה:}$$

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות  $a, b, c, d$ ? (הפתרון בהקלטה)

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות  $a, b$  יהיו ברצף?  
(הפתרון בהקלטה)

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות  $a, b$  יופיעו בתור  
הרצף  $ba$ ? (הפתרון בהקלטה)



**תרגילים:**

1. חשבו בכמה אופנים :
  - א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
  - ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
  
2. סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
  - א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
  - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
  - ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
  
3. בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים להם אותו ציון.
  - א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
  - ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים, אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
  
4. מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
  - א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטיסטיקה.

  - ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
  - ג. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
  - ד. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
  
5. אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
  - א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
  - ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
  - ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6. 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת קולנוע בכיסאות 1-8.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

**פתרונות :****שאלה 1**

א. 24

ב. 120

**שאלה 2**

א. 0.2

ב. 0.8

ג. 0.022

**שאלה 3**

א. 362,880

ב. 2,880

**שאלה 4**

א. 3,628,800

ב. 0.2

ג. 0.8

ד.  $\frac{1}{45}$ **שאלה 5**א.  $\frac{1}{792}$ ב.  $\frac{1}{99}$ ג.  $\frac{1}{4620}$ **שאלה 6**

א. 0.75

ב. 0.014

ג.  $\frac{1}{14}$ ד.  $\frac{1}{35}$

## פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

רקע:

תמורה עם חזרות :

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.  
 מספר האופנים לסדר  $n$  עצמים בשורה, ש- $n_1$  מהם זהים מסוג 1,  $n_2$  זהים מסוג 2, ...,  $n_r$  זהים מסוג  $r$ :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

למשל,

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W W T T K K ? (תשובה בהקלטה)

**תרגילים:**

1. במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות :

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות ב ע ב ע ב ע ג?

3. בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4. רוצים ליצור מספר מכל הספרות הבאות : 1,2,2,2,6  
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5. במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6. כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ 10 דגלים שונים ניתן ליצור אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

**פתרונות:**

.3 90

.4 20

.5  $\frac{1}{210}$

.6 12,600

## פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

### רקע:

#### מדגם סדור בדגימה עם החזרה

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא:  $n^k$ .

למשל,  
בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?

$$n = 10$$

$$k = 3$$

$$10^3 = 1,000$$

#### מדגם סדור ללא החזרה

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

למשל,  
שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים. תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

### תרגילים:

1. במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
  - א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
  - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
  
2. במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
  - א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
  - ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
  - ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
  
3. קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
  
4. שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
  - א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
  - ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
  
5. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
  - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.



**פתרונות :****שאלה 1 :**

א. 8000

ב. 6840

**שאלה 2 :**

א. 0.0001

ב. 0.6561

ג. 0.3439

**שאלה 3 :**

0.476

**שאלה 4 :**

א. 0.04

ב. 0.48

## פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

### רקע:

### מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

### דוגמה

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

### הערות

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad .1$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad .2$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad .3$$

### תרגילים :

1. בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות אם-
  - א. אין שום הגבלה לבחירה.
  - ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
  - ג. לא יהיו בנים במשלחת.
  
2. סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה:
  - 5 במקצועות מדעי הרוח.
  - 3 במקצועות מדעי החברה.
  - 2 מתחום המתמטיקה.
  - א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
  - ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
  - ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
  
3. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
  - א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
  
4. במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
  - א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
  - ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5. בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים : 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו- 13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם ; נסיך, מלכה, מלך ואס ( בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

- א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
- ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
- ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
- ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6. במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
- ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
- ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7. הוכח כי: 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

8.  $2n$  בנים ו-  $2n$  בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
- ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

פתרונות:שאלה 2

א. 252

ב. 100

ג. 100

ד. 60

שאלה 1

א. 53,130

ב. 20,475

ג. 3003

שאלה 4

א. 0.02

ב. 0.187

ג. 0.972

ד. 0.00246

שאלה 3

א. 0.1117

ב. 0.1445

ג. 0.9819

שאלה 8

א.  $\binom{2n}{n}^2$

ב.  $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

שאלה 6

א.  $6.45 \cdot 10^{-5}$

ב.  $2.58 \cdot 10^{-4}$

ג. 0.3225

## פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה

### רקע:

מספר האפשרויות לבחור  $k$  עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך  $n$  עצמים שונים ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת :

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

למשל,

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד ( פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

### סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת $k$ עצמים מתוך אוכלוסייה של $n$ עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ללא התחשבות בסדר הבחירה
עם החזרה	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
ללא החזרה	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

### תרגילים:

1. בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?

2. בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל- 3 תיקים שונים?

3. בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר –  
 א. הכדורים זהים.  
 ב. הכדורים שונים זה מזה .

4. בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב 4 מגירות כאשר:  
 א. המשחקים שונים זה מזה.  
 ב. במשחקים זהים זה לזה.

5. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:  $X_1 + X_2 = 3$

6. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$$

7. במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?

8. נתונות האותיות A, B, C ו-D רוצים לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?

9. במשחק הלוטו החדש יש לבחור 4 מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:

- א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.  
 ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

10. ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר :

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

11. ישנם  $k$  כדורים להכניס ל- $n$  תאים ( $n > k$ ) . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר :

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.



**פתרונות:****שאלה 1**

495

**שאלה 2**

21

**שאלה 3**

א. 45

ב. 6561

**שאלה 4**א.  $4^{10}$ 

ב. 286

**שאלה 5**

4

**שאלה 6**

1771

**שאלה 7**

15

**שאלה 8**

10

**שאלה 9**א.  $1/4,845$ ב.  $1/8,855$ **שאלה 10**

א. 7776

ב. 252

ג. 720

ד. 6

**שאלה 11**

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \cdot n^k \quad \text{א. ב.}$$

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{ג.}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ד.}$$

## פרק 9 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

2. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - ג. אין תפקידים שונים בוועד.
3. במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - ב. כמו בסעיף א. רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
3. מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
  - ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
  - ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
  - ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
4. בארונית 4 מגירות. ילד התבקש ע"י אימו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל המשחקים יחד.
- א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
  - ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
  - ג. מה ההסתברות שה"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
  - ד. מה ההסתברות שה"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5. בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
6. 5 חברים נפגשו הם רצו לראות סרט. באפשרותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
  - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיוסי וערן יבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא יבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
7. בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים, השנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8. 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות.

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:

א. ללא הגבלה.

ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.

ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9. בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. בוחרים באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10. 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות. כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?

ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?

ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?

ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11. ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו-41 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה. 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?

ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?

ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).

ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?

ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?

ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12. סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה- ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
- א. כמה סיסמאות שונות יש?
- ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
- ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?
13. מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .
- א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
- ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
- ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
14. שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים.
- בטא באמצעות  $n$  את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".
15. יוצרים קוד עם  $a$  ספרות ( מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות:
- (בטאו את תשובותיכם באמצעות  $a$  ) .
- ד. בקוד אין את הספרה 5.
- ה. בקוד מופיעה הספרה 3.
- ו. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
16. מטילים זוג קוביות מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת ( של הזוג ) עם סכום תוצאות 12?
17. בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- א. מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
- ב. מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?

18. במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור . 3 תיקיות הן אדומות ו- 2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות. ( לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).

א. מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?

ב. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?

ג. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?

ד. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?

19. לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל- 3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.

א. מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?

ב. מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?

ג. מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?

20. מסדרים  $n$  כדורים שונים ב  $n$  תאים שונים ( תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי

שבתא  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) יהיו בדיוק  $k$  כדורים ?

21. בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות .

א. כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?

ב. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?

ג. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

22. מטילים קובייה הוגנת  $K$  פעמים .

א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא  $j$ ?

ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא  $i$ ?

ג. עבור  $i \leq j$ , מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא  $j$  וגם התוצאה הכי קטנה היא  $i$  ?

**פתרונות:****שאלה 1**

ד.	102,400,000
ה.	78,960,960
ו.	658,0088

**שאלה 2**

ג.	810,000
ד.	657,720
ה.	27,405

**שאלה 3**

ד.	14,040,000
ה.	1,404,000
ו.	5,616,000
ז.	8,424,000

**שאלה 4**

א.	0.00024
ב.	0.00098
ג.	0.05933
ד.	0.75000

**שאלה 5**

ד.	0.00098
ה.	0.17798
ו.	0.02929
ז.	0.02197



**שאלה 6**

$$\frac{1}{4096} \text{ א.}$$

$$\frac{1}{32,768} \text{ ב.}$$

$$0.205 \text{ ג.}$$

$$0.795 \text{ ד.}$$

$$0.0105 \text{ ה.}$$

$$0.5129 \text{ ו.}$$

$$0.1071 \text{ ז.}$$

**שאלה 7**

$$4200 \text{ א.}$$

$$50,400 \text{ ב.}$$

$$604,800 \text{ ג.}$$

**שאלה 8**

$$604,800 \text{ א.}$$

$$2,880 \text{ ב.}$$

$$2,880 \text{ ג.}$$

**שאלה 9**

$$0.238$$

**שאלה 10**

$$0.1512 \text{ א.}$$

$$0.014 \text{ ב.}$$

$$0.059 \text{ ג.}$$

$$\frac{62}{10^6} \text{ ד.}$$

**שאלה 11**

א. 40,320

ב. 0.1071

ג. 0.2142

ד. 0.0357

ה. 0.5714

ו. 0.1429

ז. 0.0143

ח. 0.0095

**שאלה 14**

$$\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

**שאלה 16**

לפחות 25

**שאלה 17**

א. 0.35721

ב. 0.1759

**שאלה 18**

א. 0.75

ב. 0.075

ג. 0.375

ד. 0.15

**שאלה 19**

א. 0

ב.  $\frac{450}{729}$ ג.  $\frac{90}{729}$

**שאלה 20**

$$\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$$

**שאלה 21**

א. 720

ב. 360

ג. 432

**שאלה 22**

$$\frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \quad \text{א.}$$

$$\frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k} \quad \text{ג.}$$

## פרק 10 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד

### רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש B כבר קרה:

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

למשל, (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה.

נגדיר:

A – התוצאה זוגית.

B – התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את:

$$P(A|B)$$

**תרגילים:**

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
3. מטילים צמד קוביות.  
נגדיר:  
A – סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7  
B – מכפלת התוצאות 12  
חשבו את  $P(A|B)$ .
4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל שהתוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

**השאלות הבאות משלבות קומבינטוריקה:**

9. בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו ארבעה ילדים מהכיתה.  
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ושתי בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?
10. חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה ליד זה באקראי בכיסאות מספר 5 עד 9.  
אם ידוע שערך ודין התיישבו זה ליד זה. מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו 7?

**פתרונות:****שאלה 1**

0.2

**שאלה 2**

1/3

**שאלה 3**

0.5

**שאלה 4**

0

**שאלה 5**

1/6

**שאלה 6**

2/11

**שאלה 7**

1/3

**שאלה 8**

3/4

**שאלה 9**

2/3

**שאלה 10**

1/4

## פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

### רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.  
 אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

### תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :  
 נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה.  
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.  
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
  - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
  - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
  - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
  - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
  - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?
  
2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".  
 ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
  - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
  - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
  - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
  - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
  
3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
  - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
  - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
  - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
  - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?
  
4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
  - א. בנו טבלת שכירות משותפת לנתונים.
  - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
  - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
  - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
  - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
  - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?



5. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :  
 הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט",  
 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים  
 כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן,  
 5% מחזיקים בכל שלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

**פתרונות:****שאלה 1**

- א. 0.833
- ב. 0.9375
- ג. 0.0625
- ד. 0.5
- ה. 0.789

**שאלה 2**

- א. 5%
- ב. 0.0833
- ג. 0.786
- ד. 0.6875

**שאלה 3**

- א. 0.4
- ב.  $\frac{2}{3}$
- ג. 0.25
- ד.  $\frac{6}{7}$

## פרק 12 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

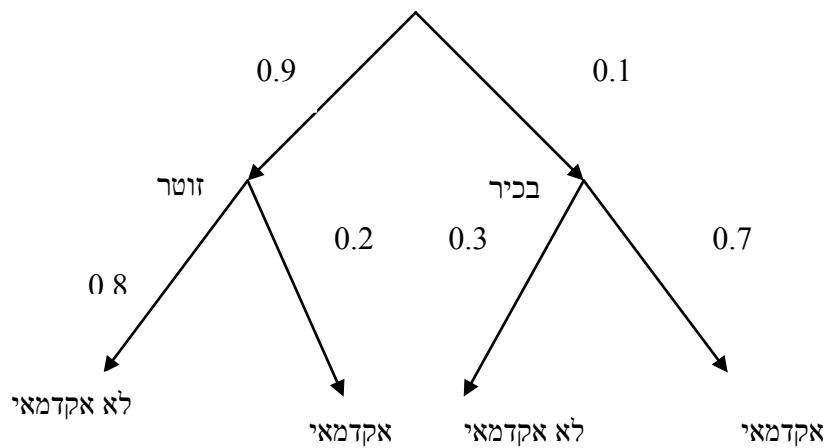
### רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.  
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.  
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף ( רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות )

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

### נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו,  $A_1, \dots, A_n$  חלוקה ממצה של  $\Omega$ .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i) \quad \text{אזי:}$$

### נוסחת בייס

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j)P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

**תרגילים:**

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
- א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?  
 ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?
2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
- א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?  
 ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?  
 ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?  
 ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?  
 ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
- א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?  
 ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?  
 ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא

נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא  $p$ , אם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש  $k$  תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10. אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:

א. דולב, רונית, דולב

ב. רונית, דולב, רונית

בכל משחק מישהו חייב לנצח (אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

פתרונות:שאלה 1א.  $2/7$ ב.  $23/49$ שאלה 2

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

שאלה 9

$$\frac{kp}{1 + (k-1)p}$$

שאלה 10

אפשרות א עדיפה



### פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות

#### רקע:

אם מתקיים ש:  $P(B|A) = p(B)$  נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך:  $P(A|B) = p(A)$  כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18 \quad \text{באופן דומה:}$$

#### הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**תרגילים:**

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:  $P(A \cup B) = 0.9$ ,  $P(A|B) = 0.6$ ,  $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$ . האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

אז:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם  $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$  אזי המאורעות בלתי תלויים.  
 ב. מאורע A כלול במאורע B.  $P(A) > 0$ ,  $0 < p(B) < 1$ , לכן  $p(A/B) < p(A)$ .  
 ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.  
 ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו-B מאורעות זרים.  
 ה.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$  לכן A ו-B מאורעות זרים.

פתרונות :שאלה 1

כן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

שאלה 8

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

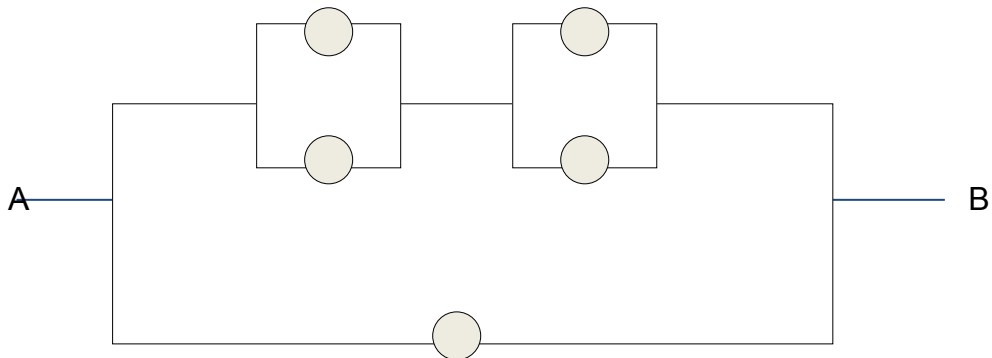
### פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?  
 ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?  
 ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?  
 ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?  
 ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג?  
 ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א?  
 ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו- "יוצר במחלבה א" בלתי תלויים?
3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:  
 בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג  
 בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה  
 בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?  
 ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?  
 ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?  
 ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?  
 ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?  
 ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?  
 ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?  
 ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?  
 ג. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 A- נבחר אדם מובטל  
 B- נבחר גבר  
 האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב-B את ההטלה השנייה ראש.
- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.  
 ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?  
 ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?  
 ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?  
 ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?  
 ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?  
 2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8. נתונה המערכת החשמלית הבאה :



- כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות  $p$ .  
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.  
 הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P + (1 - P)(2P - P^2)^2$$

9. ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות כאשר 6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.

- א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב ?  
 ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?  
 ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10. נתונים שלושה מאורעות  $A$ ,  $B$  ו- $C$ . ידוע ש:

$$P(A|B) = 1$$

$$P(A|C) = 1$$

תנו דוגמה ספציפית למאורעות  $A$ ,  $B$  ו- $C$  שבה המאורעות  $B$  ו- $C$  תלויים.

11. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה: אם  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים אז  $A$  ו- $\bar{B}$  בלתי תלויים.

12. משחקים משחק מזל פעמיים בכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא  $P$ , כאשר  $0 < P < 1$ . נגדיר את המאורעות הבאים:  $A$  – תוצאות המשחקים שונות זו מזו.  $B$  – משחק הראשון היה ניצחון. מה ערכו של  $P$  עבורו  $A$  ו- $B$  יהיו מאורעות בלתי תלויים?

13. טל מניח בשורה  $N$  קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערך מניח מכחול. הוכח שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים שונים של המכחול הוא

$$\frac{N+1}{3(N-1)}$$

14. הוכח באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .



**פתרונות:****שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

**שאלה 2**

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

**שאלה 3**

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

**שאלה 4**

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

**שאלה 5**

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

**שאלה 6**

א. 0.65

ב. A ו- B תלויים

ג. 0.5384

**שאלה 7**

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים

ד. 1. 0.478

2. 0.15

**שאלה 8**

הוכחה

**שאלה 9**

$$\begin{array}{r} 19 \\ \hline 480,700 \end{array} \quad \text{א.}$$

$$\begin{array}{r} 27,132 \\ \hline 480,700 \end{array} \quad \text{ב.}$$

$$0.4015 \quad \text{ג.}$$

**שאלה 10**

הדוגמה בהקלטה

**שאלה 11**

הוכחה

**שאלה 12**

$$\frac{1}{2}$$

**שאלה 13**

הוכחה

**שאלה 14**

הוכחה

## פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

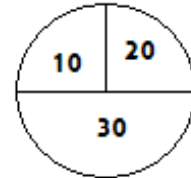
### רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד ( פתרון בהקלטה).

**תרגילים:**

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
  - 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
  - 70 משפחות עם מכונית אחת.
  - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
  - 20 משפחות עם 3 מכוניות .
 בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.  
 בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
2. מהאותיות  $C, B, A$  יוצרים קוד דו תווי.
  - א. כמה קודים ניתן ליצור?
  - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
  - ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות  $B$  מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של A.

7. בגן ילדים 8 ילדים מתוכם 5 בנים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8. בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10

להלן הנתונים :

20% צופים בערוץ 2.

8% צופים בערוץ 1.

10% צופים בערוץ 10.

כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.

10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.

נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו

את פונקציות ההסתברות של X.

**פתרונות****שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

**שאלה 4**

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

**שאלה 5**

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

**שאלה 6**

10

## פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

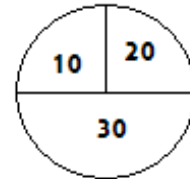
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**תוחלת** – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

**שונות** – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

**סטיית תקן** – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

**תרגילים:**

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

$X$	40	20	0	-30
$p(X)$	0.2	0.3	0.1	0.4

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

2. ביישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת ביישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק ביישוב. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר ביישוב יש חשבון. חשב את  $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווניני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של  $X$ .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .



5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

8	6	4	2	$x$
0.2		0.3		$P(x)$

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את  $V(X)$ .

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים -5, 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

7. להלן ההתפלגות של משתנה מקרי  $X$ .

$X$	$P$
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
$K$	$\frac{1}{4}$

מהו הערך  $K$  שייתן ערך מינימלי לשונות של  $X$ .

**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

**שאלה 3**

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

**שאלה 4**

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

**שאלה 5**

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

**שאלה 6**

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

**שאלה 7**

2.33

## פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

### רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. ( כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

### שלבי העבודה:

1. נוהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונוהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונוות של הרווח במשחק ?

### פתרון ( בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

**תרגילים:**

1. סטודנט נישג ל- 5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונוות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שסיים היא 3.5 עם שונוות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונוות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונוות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4.  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-  $E(X) = 4$  ו-  $V(X) = 3$ .  
 $Y$  הינו משתנה מקרי חדש עבורו  $Y = 7 - X$ .  
 חשב את:  $E(Y)$  ו-  $V(Y)$ .
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.  
 להלן התביעות האפשריות והסתברותן:  
 בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).  
 בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.  
 בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.  
 אחרת אין תביעה בכלל.  
 החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.  
 נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית באלפי ₪.  
 א. בנו את פונקצית ההסתברות של  $X$ .  
 ב. חשבו את התוחלת והשונוות של גובה התביעה.  
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונוות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6. יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	$X$
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(x)$

- 7.35. כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
- א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
- ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגוייה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

- א. מצא את ערכו של  $A$ .
- ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- ג. חשב את  $E(X^3)$ .
- ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $\frac{X}{2} - 4$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

תוחלת: 14 שונות: 32

**שאלה 2:**

תוחלת: 8 שונות: 12

**שאלה 3:**

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

**שאלה 4:**

תוחלת: 3

שונות: 3

**שאלה 6:**ב.  $V(X) = 1.8275$ **שאלה 7:**א.  $10 = A$ 

$$E(X) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$V(X) = 1$$

$$E(X^3) = 35.4 \quad \text{ג.}$$

$$V(X^3) = 616.84$$

$$E(y) = -2.5 \quad \text{ד.}$$

$$V(y) = 0.25$$

## פרק 18 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

### רקע:

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?





**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת: 9

שונות: 15

**שאלה 3**

תוחלת: 22

סטיית תקן: 5

**שאלה 4**

תוחלת: 90

שונות: 275

**שאלה 5**

$$A = \frac{12}{25} = 0.48$$

א.

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת 2.92n

שונות 1.1136n

## פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

### רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:

ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי  $n$  פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את  $X$  להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב  $p$  את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב  $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש:  $X \sim B(n, p)$ .

פונקציית ההסתברות של  $X$ :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad ; \quad 0! = 1 \quad \text{כאשר}$$

לגודל:  $\binom{n}{k}$  ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

(1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.

(2) חוזרים על הניסוי  $n$  פעמים.

(3)  $X$  – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

**דוגמה** : (פתרון בהקלטה)

- במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.
- א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

**תרגילים:**

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את  $X$  להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- א. מהי ההתפלגות של  $X$ ?
- ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
- ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
- ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
- ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
- ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את  $X$  כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

- א. מהי ההתפלגות של  $X$ ? הסבירו.
- ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
- ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
- ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
- ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
- ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
- ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
- א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
- ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
8. מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. נגדיר את  $X$  – מספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את  $E(x^2)$ .

פתרונות :שאלה 7 :

- א. 0.401  
 ב. תוחלת : 8.025  
 סטיית תקן : 2.193

שאלה 2 :

- ב. 0.2335  
 ג. 0.1493  
 ד. תוחלת : 7  
 סטיית תקן : 1.449

שאלה 8 :

7.5

שאלה 3 :

- א. 0.5314  
 ב. 0.0984  
 ג. 0.1143  
 ד. תוחלת : -18  
 סטיית תקן : 14.697

שאלה 4 :

- א. 0.1789  
 ב. 2

שאלה 5 :

- א. 0.1956  
 ב. 0.4253

שאלה 6 :

- א. 0.85  
 ב. 0.182  
 ג. תוחלת : 82 נקודות  
 שונות : 91.8 נקודות

## פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

### רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.  
 $X$  – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.  
 נסמן ב  $p$  את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב-  $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

### פונקציית ההסתברות:

$$k = 1, 2, \dots, \infty \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{:תוחלת}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{:שונות}$$

### תכונות חשובות :

אם  $X$  מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי  $X$  הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו,  
 $P(X = n + k) / X > k = P(X = n)$ .

$$P(X > k) = q^k$$

### דוגמה: ( פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים ש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק.  
 ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?
- ד. אם הוצאו יותר מ- 3 כדורים. מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

### תרגילים:

1. קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
  - א. שידגום 3 מוצרים.
  - ב. שידגום 4 מוצרים.
  - ג. שידגום 5 מוצרים.
  - ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
  - ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.
  
2. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
  - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
  - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
  - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
  - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
  
3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
  - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
  - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
  - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
  - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
  
4. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
  - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
  - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?



5. אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התוית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגת שוקולד?
- ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגות הגבינה שדגם האדם?

**פתרונות :****שאלה 2 :**

- א. 0.009  
 ב. 0.0001  
 ג. תוחלת : 1.111  
 שונות : 0.1234  
 ד. תוחלת : 44.4  
 שונות : 308.5

**שאלה 3 :**

- א. 0.999  
 ב. 0.875  
 ג. 0.03125  
 ד. 1

**שאלה 4 :**

- א. 0.1029  
 ב. 9.72

**שאלה 5 :**

- א. 0.06  
 ב. 0.7176  
 ג. 0.0729  
 ד. 9.487 משחקים

**שאלה 6 :**

- א. 0.015  
 ב. 0.0215  
 ג. תוחלת  $63\frac{1}{3}$  , שונות  $2777\frac{7}{9}$   
 ד. תוחלת  $\frac{2}{3}$  , שונות 1.054

## פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

### רקע:

התפלגות זו הנה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- $a$  ועד  $b$  בקפיצות של אחד.

$$X \sim U(a, b)$$

### פונקציית ההסתברות:

$$P(X = K) = \frac{1}{b - a + 1}$$

$$K = a, a+1, \dots, b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{:תוחלת}$$

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} \quad \text{:שונות}$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

**תרגילים :**

1. במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45 .  
נתבונן במשתנה  $X$  המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- א. חשבו את  $P(X = 2)$
- ב. חשבו את  $P(X \leq 30)$
- ג. חשבו את  $P(X > 4 | X \leq 10)$
- ד. חשבו את  $P(X = k)$
2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?  
ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
1. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?  
2. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?
3. יהי  $X$  התוצאה בהטלת קובייה.
- א. מהי ההתפלגות של  $X$ ?  
ב. מה התוחלת של  $X$ ?  
ג. קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?
4. בכד 10 כדורים שרק אחד צבע אדום. אדם מוציא כדור ללא החזרה עד אשר מתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?
5. יש לבחור מספר אקראי בי 1 ל-50 כולל.
- א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?  
ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?  
ג. אם נבחר מספר גדול מ-20 מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?
6. הוכח שאם  $X \sim U(a, b)$  אז מתקיים ש:  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ .

**פתרונות :****שאלה 1 :**א. תשובה:  $\frac{1}{45}$ ב. תשובה:  $\frac{30}{45}$ 

ג. תשובה: 0.6

**שאלה 2**

א. תוחלת: 50.5

סטיית התקן: 28.87

ב. 1. תשובה: 0.08192

ב. 2. תוחלת: 303 סטיית תקן: 70.71

**שאלה 4 :**

תוחלת 5.5

שונות: 8.25

## פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

### רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.  $\lambda$  - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim pois(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

### התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

### תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר  $\lambda$  פרפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

### דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

**תרגילים:**

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
  - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
  - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
  
2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
  - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
  - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
  - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
  
3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
  - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
  - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
  
4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
  - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
  - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
  - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
  - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
  
5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
  - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
  - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
  - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?



**פתרונות :****שאלה 1:**

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

**שאלה 2:**

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

**שאלה 3:**

א. 4

ב. 0.407

**שאלה 5:**

א. 0.2388

ב. 0.2196

ג. 0.6948

**שאלה 6:**

א. 16.7

ב. 0.0708

## פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

### רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה  $N$  פריטים, מתוכם  $D$  פריטים בעלי תכונה מסוימת - פריטים אלה נקראים "מיוחדים".

בוחרים מאותה אוכלוסייה  $n$  פריטים ללא החזרה.

$X$  – מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.

משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים  $(N, D, n)$  יסומן על ידי:  $X \sim H(N, D, n)$ .

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

### התוחלת של ההתפלגות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N}$$

### השונות של ההתפלגות:

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

### דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

בכתה 40 תלמידים מתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שישעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?

ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

**תרגילים:**

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
  - ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
  - ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
  
2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את  $X$  להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$  בנוסחה ולא בטבלה.
  - ב. מה התוחלת וסטיית התקן של  $X$ ?
  - ג. חשבו את ההסתברות הבאה:  $P(X = 2 | X > 1)$
  
3. זהה בסעיפים הבאים את ההתפלגות וחשב לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
  - נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
    - אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
      - א. האוכלוסייה גדולה מאד.
      - ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
  
4. בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו- 5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
  - א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
  - ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

**פתרונות:****שאלה 2**

ב. תוחלת: 1.5  
 סטיית תקן: 0.748  
 ג. 0.9

**שאלה 1**

ב. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$  שונות:  $\frac{5}{9}$   
 ג. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$  שונות:  $\frac{20}{27}$

## פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית

### רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- $r$  ית .

$X$  - מספר החזרות עד שהתקבלו  $r$  הצלחות.

$$X \sim NB(r, p)$$

### פונקציית ההסתברות:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$k = r, r+1, \dots, \infty$$

### התוחלת:

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

### השונות:

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה עד אשר מקבלים 3 פעמים תוצאה שהיא גדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

**תרגילים:**

1. בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. אדם מוציא כדור באקראי פעם אחר פעם ומחזיר בין הוצאה להוצאה את הכדור. נסמן ב- $X$  את מספר הכדורים שהוא הוציא עד אשר הוא קיבל 2 כדורים לבנים בסך הכול אך לא בהכרח ברצף.

א. חשבו את  $P(X = 2)$

ב. חשבו את  $P(X = 3)$

ג. חשבו את  $P(X = 4)$

ד. חשבו את  $P(X = k)$

2. הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים ( לא בהכרח ברצף).

א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?

ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?

ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?

ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?

ה. מה הסיכוי שישחק  $K$  פעמים?

3. הראה שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

4. מטילים מטבע שוב ושוב עד אשר מקבלים שלוש פעמים עץ בסך בכול.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.

ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?

ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות

נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

5. יהיה  $X_i$  מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה כאשר  $i=1,2,\dots,n$ .

הוכח שהתוחלת והשונות של  $\sum_{i=1}^n X_i$  זהה לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית

השלילית  $NB(n, p)$ .

**פתרונות:****שאלה 4**

ב. תוחלת: 6 שונות: 6  
ג. 0.1886

**שאלה 1**

א. 0.36  
ב. 0.288

## פרק 25 - המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות

### תרגילים:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $X$ .

ב.  $W = 2X - 4$ , חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $W$ .

ג.  $T = X + Y$ , חשב את התוחלת של  $T$ . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של  $T$ ?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכוונה (במכוונה א' ובמכוונה ב'). הסיכוי

שלו לנצח במשחק במכוונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכוונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ינצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו

שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסוניית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?



5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי  $X$  - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של  $X$ ?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית.

חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.

להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:

הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.

הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.

הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.

ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר

הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה

ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8. מבחן בנוי משני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
  - מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
  - מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
  - מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?
9. יהי  $X$  משתנה מקרי המקיים  $E(X) = 2$  וכן  $V(X) = 1$ . חשב  $E(X - 5)^2$ .
10. הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו  $P$ . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי  $8/3$  מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.
- חשבו את ערכו של  $P$ .
- תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
- מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?
  - מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?
  - מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?
  - ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?
11. רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע  $n$  צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי  $P$  ימינה ביחידה אחת ובסיכוי  $1-P$  שמאלה ביחידה אחת. נסמן ב- $X$  את המספר עליו עומד הרובוט לאחר  $n$  צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של  $X$  באמצעות  $P$  ו- $n$ .

12. למטבע יש סיכוי  $P$  לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות  $P$ ).
- ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות  $P$ .
- ג. לאילו ערכי  $P$  המשחק כדאי?

13. מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל  $m+1$  פעמים עץ. רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14. לפניכם  $N$  מגירות ממוספרות מ-1 ועד  $N$ . ברשותכם  $n$  חולצות. עליכם באופן אקראי לבחור לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל החולצות שברשותכם. נגדיר את  $X_1 -$  מספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1. נגדיר את  $X_N -$  מספר החולצות שהונחו במגירה מספר  $N$ .
- חשבו את  $V(X_1 + X_N)$ .

15.  $n$  אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם. מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16. הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א בהכרח ניגש למועד ב ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון. נתון שלמועד א נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס. מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

17. לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- $i$  מתפלג פואסונית עם קצב של  $i$  אנשים בשנייה. יהי  $Y$  מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.

$$E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$$

מצאו את

18. לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים. נסמן ב- $X$  את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים. חשבו את  $E(\sqrt{x+7})$ .

19. בשדרות רוטשילד החליטו לשתול  $n$  ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את  $X$  להיות מספר הברושים בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתל.  
א. מצאו את ההתפלגות של  $X$ .

ב. הוכיחו שהתוחלת של  $X$  היא  $\frac{n-2}{3}$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. תוחלת: 2

סטיית תקן: 1

ב. תוחלת: 0

סטיית תקן: 2

ג. תוחלת: 4.5

סטיית תקן: לא ניתן

**שאלה 2:**

א. 0.03

ב. תוחלת: 0.15, שונות 0.1875

ג. 0.1328

**שאלה 3:**

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

שונות: 2

ג. תוחלת: 1.5

שונות: 0.5

**שאלה 4:**

א. 0.9975

ב. 0.0172

ג. 1.0025

**שאלה 5:**

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

**שאלה 6:**

ב. תוחלת : 1.5

שונות 0.61

ג. תוחלת : 0

סטיית תקן : 4.68

**שאלה 7:**

א. 0.4348

ב. 0.0923

**שאלה 8 :**

א. 2.013

ב. 0.5256

ג. תוחלת : 8

שונות : 1.6

ד. תוחלת : 10.5

שונות 3.475

**שאלה 9 :**

10

**שאלה 10:**

א. 0.6

ב. 0.0384

ג. 0.0256

ד. תוחלת : 0.67

שונות : 1.11

ה. 0.24

**שאלה 12:**

$$\frac{1-2p^2}{p} \quad \text{ב.}$$

$$0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 13:**

$$P(X = k) = \binom{m+k}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1} \quad k = 0, 1, \dots, \infty$$

**שאלה 14:**

$$n \cdot \left(\frac{2}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right)$$

**שאלה 15:**

$$\frac{2^n}{2n}$$

**שאלה 16:**

3	2	1	x
0.7099	0.2893	0.0008	P(x)

**שאלה 17:**

$$\frac{e^{-6}}{6} [e^6 - 1]$$

**שאלה 18:**

2.675

**שאלה 19:**

$$P(X = k) = \frac{n-k-1}{\binom{n}{2}} \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad \text{א.}$$

ב. הוכחה

## פרק 26 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

### רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב  $f(x)$ .

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

### פונקציית התפלגות מצטברת:

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

כמו כן:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$p(X > t) = 1 - F(t)$$

### תוחלת של משתנה רציף:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$$

### שונות של משתנה רציף:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$$

### תוחלת של פונקציה של X:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

### אחוזונים:

האחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו :  $x_p$ ) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר :

$$p(X \leq x_p) = p$$



ריענון מתמטי:נוסחאות לחישוב שטחים:

$$S_{\text{triangle}} = \frac{h \cdot a}{2} \quad \text{שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2}$$

$$S_{\text{rectangle}} = a \cdot b \quad \text{שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b)}$$

משוואת קו ישר:

$$y = mx + n$$

$$\text{שיפוע} = m$$

$$n = \text{נקודת החיתוך עם ציר ה-y.}$$

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: } (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית  $(X_1, Y_1)$  ושיפועו ידוע  $m$ :

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \tan(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + c$$

$$\int \cot(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

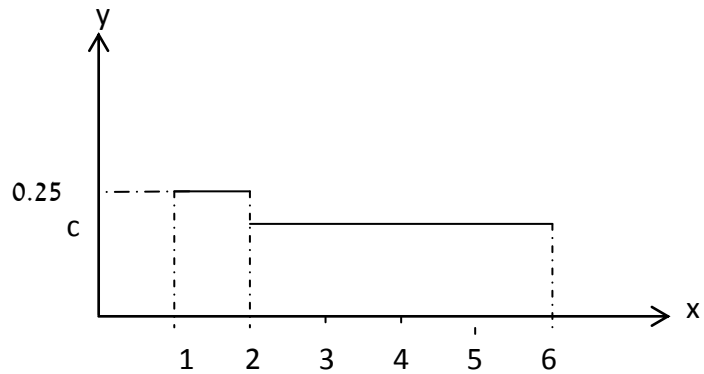
$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

**תרגילים:**

1.  $X$  הינו משתנה רציף עם פונקציה צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של  $c$ .

ב. בנה את פונקציה ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1.  $P(x < 4)$

2.  $P(x > 1.5)$

3.  $P(1.5 < x < 5)$

4.  $P(5 < x < 10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף  $X$  שפונקציה הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

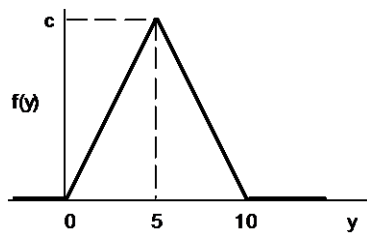
ידוע ש-  $P(0 < X < 1) = 1/4$ .

א. מצאו במפורש את פונקציה הצפיפות של  $X$ .

ב. מצאו את החציון של  $X$ .

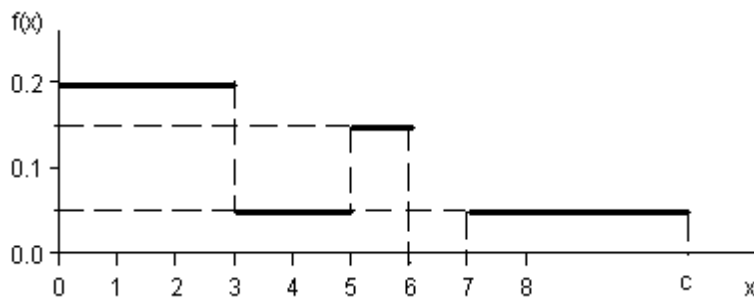
ג. מה הסיכוי ש-  $X$  קטן מ- 0.5 ?

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $Y$  :



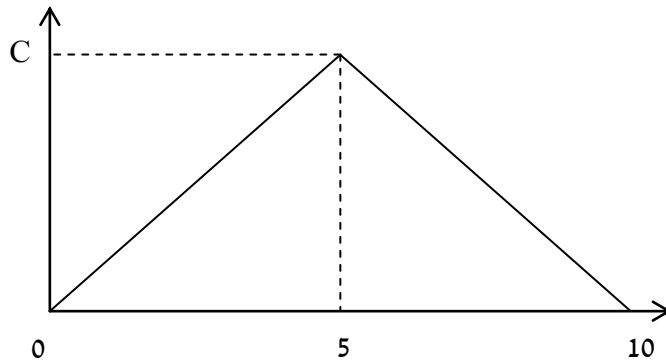
- א. מצאו את  $c$ .  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .  
 ג. חשבו את ההסתברויות:  $P(Y > 4)$ ,  $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$ ,  $P(Y \leq 3.0)$ ,  $P(Y = 7.0)$ .  
 ד. מצאו את העשירון התחתון  $y_{0.1}$ , הרבעון התחתון  $y_{0.25}$  והחציון של  $Y$ . הסיקו מהו העשירון עליון  $y_{0.9}$ .

4. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $X$  :



- א. מצאו ערך  $c$  שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:  $P(1.0 < X \leq 5.0)$ ,  $P(X \geq -2.0)$ ,  $P(X \geq 4)$ .

5. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה :



- א. מה ערכו של C?  
 ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5

6. נתונה פונקצית צפיפות  $f(X) = \frac{2}{x}$  פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

- א. מצא את ערכו של K.  
 ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשב את הסיכוי ש X לפחות 1.5.  
 ד. מצא את העשירון התחתון של ההתפלגות.  
 ה. מה התוחלת של X?

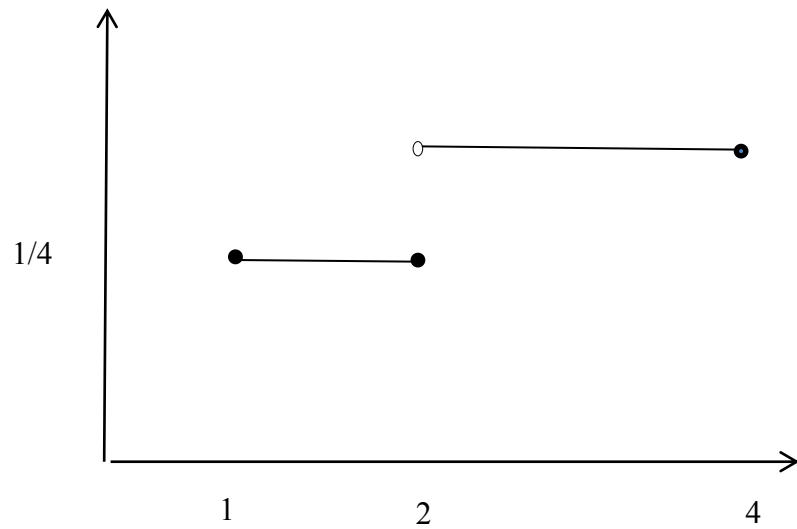
7. נתונה פונקצית צפיפות הבאה :  $f(X) = AX^2(10 - X)$   $0 < X < 10$  A הינו קבוע חיובי.

- א. מצא את A.  
 ב. חשב את  $P(x > 5 | x > 2)$ .  
 ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8. פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי רציף  $X$  :  
 $f(x) = 0.5 \cdot e^{-2x}$   
 $-\infty \leq X \leq \ln(c)$

- מצא את ערכו של  $c$ .
- מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
- חשב  $P(X > 0)$ .
- מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי  $X$  :



- רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.
- בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- מצא את החציון של ההתפלגות.
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.
- חשב את  $E(X^3)$ .

10. במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

- א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?  
 ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?  
 ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ 20 דקות?

11. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה:

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?  
 ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?  
 ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12. פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b.  
 ב. חשבו את התוחלת של X.  
 ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y?

13. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של  $k$ .  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו  $p(x > 2.5)$

14. להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

- א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.  
 ג. מצא את התוחלת של  $\frac{1}{X}$ .

פתרונות :שאלה 1 :

$$א. \frac{3}{16} \quad ד. \frac{1}{3}$$

שאלה 2 :

$$א. c=0.5 \quad b=2$$

$$ב. 1.41$$

$$ג. 0.0625$$

שאלה 3 :

$$א. 0.2$$

$$ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32$$

ד. העשירון התחתון : 2.24

הרבעון התחתון: 3.54

החציון : 5

העשירון העליון : 7.76

שאלה 4 :

$$א. 10$$

שאלה 5 :

$$א. C=0.2$$

$$ב. 5 \pm 1.46$$

שאלה 6 :

$$א. \frac{1}{e^2}$$

$$ג. 0.189$$

$$ד. 1.051$$

$$ה. 1.297$$

שאלה 7 :

$$א. 0.0012$$

$$ב. 0.7067$$

שאלה 8 :

$$א. 2$$

$$ג. 0.75$$

$$ד. 0.549$$

ג. תוחלת : 6, שונות : 4



**שאלה 9 :**

ג.  $2\frac{2}{3}$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ה. 23.4375

**שאלה 10 :**

א.  $\frac{7}{27}$

ב. 0

ג. 3.704

**שאלה 11 :**

ב. 0.0498

ג. 0.6321

ד. 11.51

**שאלה 12 :**

א.  $\frac{2}{3}$

ב. 5.22

ג.  $\frac{2}{9}$

**שאלה 14 :**

ב. תוחלת :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות :

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**שאלה 13 :**

א.  $\frac{1}{6}$

ג. 0.229

## פרק 27 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית

### רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.  $\lambda$  - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן ( אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ כאשר } \lambda > 0$$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד להתרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ לכל } x \geq 0$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

• להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון:  $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

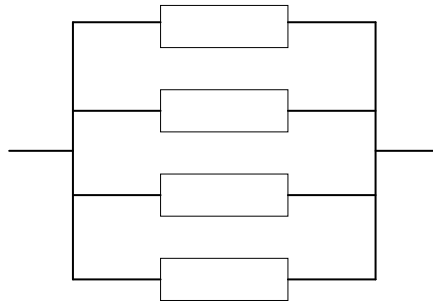
דוגמה: (פתרון בהקלטה)

- אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.
- מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ- 9 שעות?
  - מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?
  - אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

### תרגילים:

1. הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
  - א. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
  - ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
  - ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.
  
2. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
  - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
  - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
  - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?
  
3. משך הזמן  $X$  (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
  - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
  - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
  - ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
  - ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?
  
4. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
  - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
  - ב. אם שולה המתונה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
  - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט :



- על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.  
 אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.  
 א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?  
 ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא  $K$  ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של  $A$  ₪.  
 מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

**פתרונות:****שאלה 1 :**

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

**שאלה 2 :**

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

**שאלה 3 :**

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד. 69.08

**שאלה 4 :**

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

**שאלה 5 :**

א. 0.8403

ב.  $A0.0588 > K$

## פרק 28 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

### רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין  $a$  לבין  $b$ .

$$X \sim U(a, b)$$

### פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

### פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

### התוחלת:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

### השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

$X$ -משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

א. מה הסיכוי ש- $X$  קטן מ-25?

ב. מה התוחלת והשונות של  $X$ ?

**תרגילים:**

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור,  $X$ , מתפלג  $U(13, 16)$ .
  - א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?
  - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
  - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?
  
2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
  - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
  - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
  - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?
  
3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
  - א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
  - ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
  - ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

פתרונות:שאלה 2:א.  $X \sim U(0,10)$ 

ב. 0.6

ג. 10

שאלה 1:

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב.  $1/3$ ג.  $2/3$ שאלה 3:

א. 0.2

ב.  $\frac{2}{7}$ 

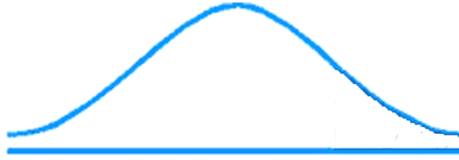
ג. 109



## פרק 29 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות  $Z$ .

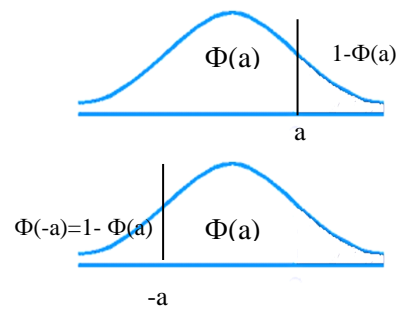
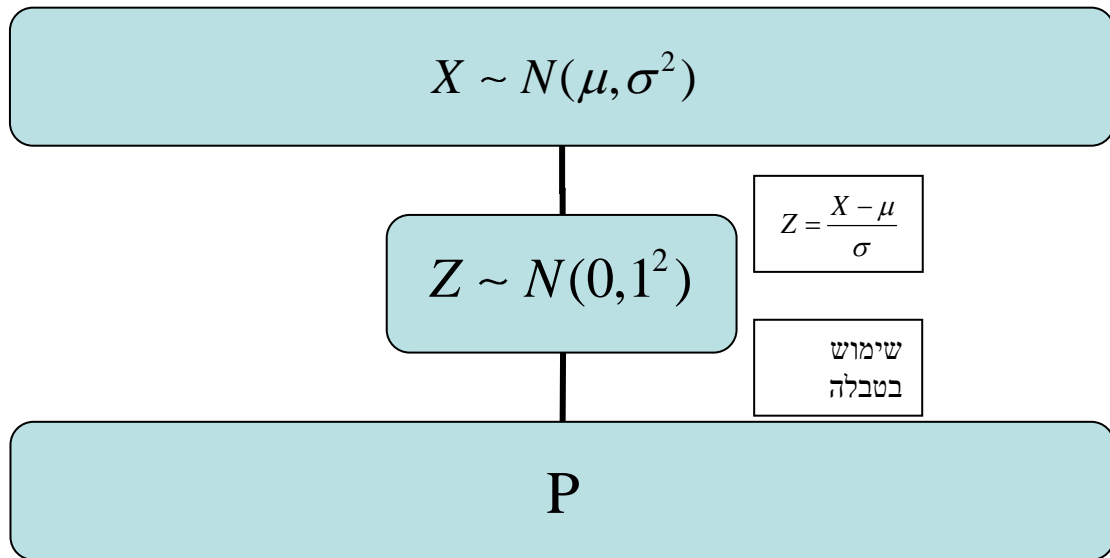
$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

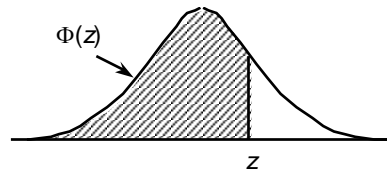
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע. לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



**טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$**



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

**דוגמה:** (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

**תרגילים:**

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל- 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - מהו האחוזון ה- 20?
  - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
  - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
  - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
  - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
  - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?  
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה

הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן

הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות

שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- מה ערכו של T?
  - מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
  - מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
  - מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
  - ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
  - בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?



פתרונות :

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 26.43%	א. 89.25%
ב. 89.44%	ב. 2.28%
ג. 39.44%	ג. 0
ד. 0.383	ד. 50%
ה. 100%	

<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 500	א. 119.2
ב. 100	ב. 80.8
ג. 0.3446	ג. 112.6
ד. 733	ד. 87.4
ה. 267	

<u>שאלה 9</u>	<u>שאלה 8</u>
א. 0.1587	א. 3
ב. 0.0228	ב. בממוצע.
ג. 0.8563	ג. 1
ד. 0.3975	

<u>שאלה 11</u>	<u>שאלה 10</u>
א. 0.1359	א. 1925
ב. 0.675	ב. 0.2266
ג. 100	ג. 0.1587
ד. 0.25	

**פרק 30 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף****רקע:**

מדובר על מצב שידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

נתון משתנה מקרי רציף:  $X$  המתפלג אחיד בין 0 ל-1. מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת

של המשתנה  $Y$ . כאשר הקשר בין  $X$  ל- $Y$  נתון על ידי הנוסחה:  $Y = e^x$ .

**תרגילים:**

1. יהי  $W$  משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1.

$$. Y = e^{-W} \text{ הגדירו משתנה חדש}$$

א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .

ב. זהה את  $Y$  כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.

2. נתון ש-  $X \sim U(0,1)$ . יוצרים דרך  $X$  משתנה חדש המוגדר להיות:  $R = X^2$ . מצאו את

פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש  $R$ .

3. ידוע ש-  $X \sim \exp(\lambda)$  כמו כן נתון הקשר הבא:  $Y = \ln(X)$ . הוכח שפונקציית הצפיפות של

$$Y \text{ נתונה על ידי הנוסחה הבאה: } f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^Y + 1}$$

4. ידוע ש-  $X \sim \exp(\lambda = 1)$  כמו כן נתון הקשר הבא:  $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$ .

א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .

ב. זהה את ההתפלגות של  $Y$ .

5. אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2. מצא את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.

6. נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה:  $F_X(t) = \theta^t - 1$  עבור התחום  $0 \leq t \leq 1$ .

א. מצא את ערכו של הפרמטר  $\theta$ .

ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה  $X$ .

ג. יהי  $Y = 2^X - 1$ . מצא את פונקציית הצפיפות של  $Y$  וזהה את התפלגותו.

פתרונות:שאלה 1:

ב.  $Y \sim U(0,1)$

שאלה 2:

כאשר  $0 < R < 1$   $f(R) = \frac{1}{2\sqrt{R}}$

שאלה 4:

$Y \sim U(-1,1)$

שאלה 5:

כאשר  $1 < y < 8$   $f(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$

שאלה 6:

א. 2

ג.  $Y \sim U(0,1)$

## פרק 31 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקציות הסתברות משותפת

### רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים.

נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית.

בפונקציה שכזו יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית:  $Y$  ו  $X$ .

### דוגמה:

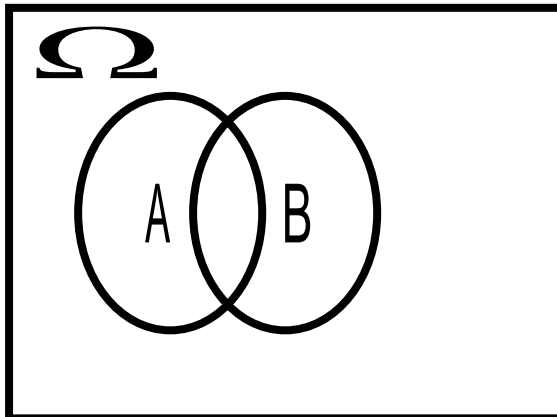
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי  $X$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $Y$  ו  $X$ .



נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:

$$p(x=0, y=0) = 0.05$$

$$p(x=0, y=1) = 0$$

$$p(x=1, y=0) = 0.15$$

$$p(x=1, y=1) = 0.05$$

$$p(x=2, y=0) = 0$$

$$p(x=2, y=1) = 0.75$$

$y \backslash X$	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

$y \backslash X$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

### משתנים בלתי תלויים:

$X$  ו  $Y$  יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו-  $Y$  אפשריים התקיים הדבר הבא:

$$p(x = k, y = l) = p(x = k) \cdot p(y = l)$$

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

למשל, בדוגמה הזאת:

$$p(x = 2, y = 1) = 0.75 \neq p(x = 2) \cdot p(y = 1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$$

ככלל אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים. שאז הרי התנאי לא מתקיים.  
אך אם אין אפס בטבלה אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

**תרגילים :**

1. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר . הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 03 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר . אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר , אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ- 3 משחקים. נגדיר את  $X$  להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת  $Y$  מספר המשחקים שהאדם שיחק.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.
- ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?
- ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר , מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2. להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים :

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

- א. השלם את ההסתברויות החסרות בטבלה.
- ב. האם  $X$  ו- $Y$  תלויים ?
- ג. מצא את הסתברות ש- $Y=3$  , אם ידוע ש- $X=1$  .
3. מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא  $1/10$ . מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקורת איכות. יהיו  $X$  מספר המוצרים בחבילה,  $Y$  מספר המוצרים הפגומים בחבילה.
- א. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו 3.
- ב. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו  $K$  כלשהו.
- ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.
- ד. בנה את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4. מתוך כד עם שלושה כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים ללא החזרה. נגדיר:  $X$  - המספר הקטן מבין השניים;  $Y$  - המספר הגדול מבין השניים.
- א. חשבו את ההתפלגות של  $(X, Y)$ .
- ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימאלי 8?
- ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = 4$ . מצאו  $E(X / Y = 4)$ .

5. ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב:

ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב.

ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב.

ל-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.

יהי  $X$  - מספר הסניפים ביישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור:

1- אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.

0- אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?



**פתרונות:****שאלה 1:**

ב. 2.4

ג. התוחלת 1.348 השונות 0.575

**שאלה 2:**

ב. תלויים

ג. 0.125

**שאלה 4:**

ב. 0.5

ג. תוחלת 2

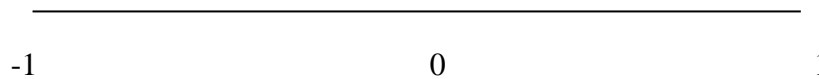
**שאלה 5:**

ג. 0.75

## פרק 32 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

### רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים .  
 על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב  $\rho$  .  
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1 .



מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה :  $y = ax + b$  .

מתאם חיובי מלא ( מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי ( מקדם מתאם -1) .

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט .

### חישוב מקדם המתאם :

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} : \text{ הנוסחה של מקדם המתאם היא}$$

השונוות המשותפת :

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונוות המשותפת :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) .1$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X) .2$$

**משתנים בלתי מתואמים :**

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין בינם התאמה לינארית.

משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין בינם קשר ולכן הם גם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

**השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם**

$$\rho[(aX + b), (cY + d)] = \begin{cases} \rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר בינם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם :

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.

כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.

הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי  $X$  - מספר הקורסים שהסטודנט עבר.

יהי  $Y$  - משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

נחשב את מקדם המתאם :

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

y	$P_y$
0	0.2
1	0.8

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב- 3 נקודות אקדמאיות.  
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y ?

**תרגילים:**

1. הסיכוי שסטודנט יעבור את מועד א בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך להיות 0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2. ואז הסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
  - נגדיר את  $X$  להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט.
  - נגדיר את  $Y$  להיות מספר הנבחנים שנכשל בהם.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.
  - ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
  - ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
  - ד. האם המתאם בין  $X$  ל- $Y$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבר ללא חישוב.
  - ה. חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ .
  - ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
  
2. מטילים מטבע שלוש פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות ואת  $Y$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
  - ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים?
  - ג. מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ . האם המשתנים מתאומים?
  - ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
  - ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
  
3. מפזרים שלושה כדורים שונים בשלושה תאים.
  - נגדיר את המשתנים הבאים:
  - $X$  = מספר הכדורים בתא הראשון.
  - $Y$  = מספר הכדורים בתא השני.
  - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
  - ב. האם המשתנים בלתי מתאומים?

4. מטילים קובייה הוגנת פעמיים.

יהי  $X =$  ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות

$Y =$  מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. חשבו את מקדם המתאם של  $X$  ו- $Y$ .

ג. מצאו את ההתפלגות של  $Y$  בהינתן ש- $X=2$ .

5. בבניין בן 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט

לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים :

$X$  - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.

$Y$  - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ ?

ד. מה יהיה מקדם המתאם :

1. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

2. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון שקלים, כל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון

שקלים. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

**פתרונות :****שאלה 1 :**

ג. 0.994

ה. 0.963

**שאלה 2 :**

ב. תלויים.

ג. מקדם המתאם : 0.5. מתואמים

ד. 0.25

ה. 0.5

**שאלה 3 :**

ב. מתואמים

**שאלה 4 :**

ב. 0.252

**שאלה 5 :**

ב. X ו-Y מתואמים.

ג.  $\frac{2}{3}$ ד.1.  $-\frac{2}{3}$ 

ד.2. (-1)

ה.  $-\frac{2}{3}$

**פרק 33 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות**

**רקע:**

**תוחלת ושונות של סכום משתנים :**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot COV(X, Y)$$

**תוחלת ושונות של הפרש משתנים :**

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot COV(X, Y)$$

**קומבינציות לינאריות:**

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים :

$$W = (aX + b) + (cY + d)$$

$$COV[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot COV(X, Y)$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

עבור שני משתנים מקריים נתון :

$$\mu_X = 80$$

$$\sigma_X = 15$$

$$\mu_Y = 70$$

$$\sigma_Y = 20$$

$$COV(X, Y) = 200$$

- מצא את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- מצא את התוחלת והשונות של  $Y - X$ .
- מצא את השונות ומה התוחלת של המשתנה  $W = 2X + 3Y$



**תרגילים:**

1. נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y\X	1	2	3	P(Y)
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
P(X)				

א. השלם את ההסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשב את השונות המשותפת.

ה. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2. מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100 עם סטיית

תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון

הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק

המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי

ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות

הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3. נתון:  $\text{Var}(X-2Y)=2$  .  $\text{Var}(X+2Y)=3$  . חשבו:  $\text{Cov}(X,Y)$ .

4. מטילים קובייה n פעמים.

נגדיר את המשתנים הבאים:

$X$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

$Y$  = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות n.

**פתרונות :****שאלה 1:**

ב. תלויים

ג. מתואמים.

ד.  $-0.1$ ה. תוחלת:  $4.4$ , שונות:  $0.84$ ו. תוחלת:  $-0.4$ , שונות:  $1.24$ **שאלה 2:**א.  $240$ ב. תוחלת:  $190$  שונות:  $1105$ ג. תוחלת:  $10$  שונות:  $145$ ד. תוחלת:  $1710$  שונות:  $2785$ **שאלה 3:** $-0.125$ **שאלה 4**

$$\frac{-n}{36}$$

## פרק 34 - משתנה דו ממדי בדיד – שאלות מסכמות

רקע:

משתנים בלתי תלויים:

X ו Y יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y אפשריים מתקיים :

$$p(x = k, y = l) = p(x = k) \cdot p(y = l)$$

מקדם המתאם:

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

השונות המשותפת:

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונות המשותפת:

3.  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
4.  $\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
5.  $\text{COV}[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot \text{COV}(X, Y)$

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם

$$\rho[(aX + b), (cY + d)] = \begin{cases} \rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X, Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

תוחלת ושונות של סכום משתנים:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{COV}(X, Y)$$

$$W = (aX + b) + (cY + d) \quad \text{קומבינציות לינאריות:}$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{COV}(X, Y)$$

**תרגילים :**

1. יש ליצור סיסמא בת 3 תווים . כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים : 1 2 A B C .  
 יהי X מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמא. יהי Y מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצות הסיסמא ( ראשון או האחרון ).  
 א. זהו את ההתפלגויות השוליות של X ו-Y כהתפלגויות מיוחדות.  
 ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ושל Y.  
 ג. מצאו את מקדם המתאם בין X ל-Y.  
 ד. מהו המתאם בין  $2X$  ל-  $3Y + 5$  ?
2. במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה : 4 "מכבי", 2 "גולדסטאר" ו- 1 "טובורג" . קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח.  
 נסמן ב- X את מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן.  
 נסמן ב- Y את מספר בקבוקי "טובורג" שנלקחו על ידי קרן.  
 א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ושל Y.  
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של X ושל Y .  
 ג. מצאו את השונות המשותפת של X ושל Y.  
 ד. נגדיר את W – מספר בקבוקי ה"גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן. בטאו את W באמצעות X ו- Y וחשבו את התוחלת והשונות של W על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.  
 ה. מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?
3. במגירה 6 זוגות נעלים . יהודה הוציא מהמגירה 4 נעלים ( לא בהכרח זוגות) באקראי. נסמן את W – מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה. נסמן את R - מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.  
 א. מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו .  
 ב. האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?  
 ג. מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.  
 ד. אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

4. בכד 5 כדורים כחולים, 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים:

$X$  - משתנה המקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול ו-0 אחרת.

$Y$  - מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

א. חשב את  $P(X=1)$ .

ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ג. מה התוחלת של  $Y$  אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?

ד. מה השונות של  $X$  אם ידוע שהוצאו לכל היותר כדור לבן אחד?

5. ביום ההולדת 4 של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל-5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה-5 באופן אקראי ובלתי תלוי לבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים:

$X$  - מספר הפרסים שקיבלה יוליה.

$Y$  - מספר הילדים שלא קיבלו פרס.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של  $X$  ו- $Y$ .

ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי מתואמים?

ג. מצאו את התוחלת של  $X \cdot Y^2$ .

ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה למספר הילדים שקיבלו פרס?

6. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו.

א. אם שני משתנים הם מתואמים אזי הם תלויים.

ב. אם שני משתנים הם תלויים אזי הם מתואמים.

ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים אזי הם בלתי מתואמים.

ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים אזי הם בלתי תלויים.

7. במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו-25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות, מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

נסמן  $X_i$  - מספר הגברים שבחרו במתנה  $i$ .

נסמן  $Y_i$  - מספר הנשים שבחרו במתנה  $i$ .

א. האם  $X_1$  ו- $Y_1$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ב. האם  $X_1$  ו- $X_2$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ג. מהי ההתפלגות של  $X_1 + X_2$ ?

ד. האם המתאם בין  $X_1$  ו- $X_2$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? אין צורך לחשב רק להסביר.

8. הוכח את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים:

$$COV(X + Y, Z) = COV(X, Z) + COV(Y, Z)$$

9. מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50 עלים בדקה.

נסמן  $Y$  - מספר העלים שנושרים בסתיו בין 12:00 ל-12:10.

נסמן  $Q$  - מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל-12:30.

א. חשבו את  $COV(4Y, Q + 6)$ .

ב. מה המתאם בין  $Y$  ל- $Q$ ?

10. בסל 20 כדורים אדומים, 20 כדורים ירוקים ו-20 כחולים. מוציאים באקראי מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

11. נתון ש:  $Y \sim B(1, p)$  כאשר  $0 < p < 1$  הוכח שאם מתקיים:

$$P(X = x | Y = 0) = P(X = x | Y = 1)$$

אזי  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים.

12. נתון ש  $X \sim B(n, p)$  ו- $Y \sim B(m, p)$  והם בלתי תלויים זה בזה. הוכח שמתקיים

$$X | X + Y = k \sim HG(n + m, n, k)$$

**פתרונות :****שאלה 1 :**

$$X \sim B(3, \frac{1}{5}) \quad Y \sim B(2, \frac{1}{5}) \quad . \text{א}$$

. ב

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P_Y$
0	$\frac{64}{125}$	$\frac{16}{125}$	0	0	$\frac{80}{125}$
1	0	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{125}$	0	$\frac{40}{125}$
2	0	0	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
$P_X$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

ג. 0.816

ד. 0.816

שאלה 2 :

.א

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P_Y$
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{20}{35}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{15}{35}$
$P_X$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(X) = \frac{12}{7} \quad V(X) = \frac{24}{49} \quad E(Y) = \frac{3}{7} \quad V(Y) = \frac{12}{49} \quad \text{ב.}$$

$$-\frac{8}{49} \quad \text{ג.}$$

$$E(W) = \frac{6}{7} \quad V(W) = \frac{20}{49} \quad \text{ד.}$$

ה. -1



**שאלה 3:**

.א.

$R \backslash W$	0	1	2	$P_R$
0	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
2	$\frac{90}{495}$	$\frac{120}{495}$	$\frac{15}{495}$	$\frac{225}{495}$
3	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
4	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
$P_W$	$\frac{240}{495}$	$\frac{240}{495}$	$\frac{15}{495}$	1

ב. המשתנים תלויים.

ד. 1

**שאלה 4:**.א.  $\frac{185}{220}$ 

ג. 1.714

ד. 0.164

**שאלה 5:**

- ב.  $X$  ו- $Y$  בלתי מתואמים.  
 ג. 4.128  
 ד. 0.

**שאלה 6:**

- א. נכון  
 ב. לא נכון  
 ג. נכון  
 ד. לא נכון

**שאלה 7:**

- א. בלתי תלויים  
 ב. תלויים  
 ד. חלקי ושלילי.

**שאלה 8:**

הוכחה

**שאלה 9:**

- א. 1000  
 ב. 0.316

**שאלה 10:**

-0.5

**שאלה 11:**

הוכחה

**שאלה 12:**

הוכחה

## פרק 35 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית

### רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית מתפלגת נורמאלית בעצמה.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאישה אקראית? ( 0.7823 )

**תרגילים:**

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.  
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.  
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?
2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.  
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?  
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?  
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.  
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?  
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?  
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?
4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.  
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.  
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
5. לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נימכר ב-3 ₪.  
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?  
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?  
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

**פתרונות:****שאלה 1**

0.2177

**שאלה 2**

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

**שאלה 3**

א. תוחלת 300, שונות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

**שאלה 4**

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל.

ב. 0.0062

## פרק 36 - פונקציה יוצרת מומנטים

### רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות :  $M_X(t) = E(e^{t \cdot X})$ .

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד . פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \sum_k e^{t \cdot k} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף. פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_x e^{t \cdot x} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות :  $E(X^n)$

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת החית לפי t של פונקציית יוצרת המומנטים

$$M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n) \quad \text{כלומר: } t=0.$$

**משפט:** קיימת התאמה חד חד ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

### תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{כלל שרשרת}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

הראו שפונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות המעריכית  $X \sim \exp(\lambda)$

$$\text{היא: } \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

**תרגילים:**

1. נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

X	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א.

2. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית  $X \sim B(n, p)$  ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

3. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית  $X \sim G(P)$  וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

4. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית  $x \sim p(\lambda)$ . מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות

5. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של A.

ב. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של X.

6. יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16. יהי  $m_x(t)$  פונקציית יוצרת המומנטים של X.

Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים  $m_y(t)$ .

$$\text{ונתון } m_y(t) = t \cdot m_x(t)$$

חשבו את התוחלת והשונות של y.



**פתרונות:****שאלה 1:**

$$1\frac{2}{3} \quad \text{ב.}$$

**שאלה 2:**

פונקציית יוצרת מומנטים:  $(e^t \cdot p + 1 - p)^n$

**שאלה 3:**

פונקציית יוצרת מומנטים:  $\frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}$

**שאלה 4:**

פונקציית יוצרת המומנטים:  $e^{\lambda(e^t - 1)}$

**שאלה 5:**

$$\frac{1}{1 - e^{-7}} \quad \text{א.}$$

**שאלה 6:**

תוחלת: 1 : שונות: 9

## נספח:

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	התפלגות
$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2}$	$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	אחיד $U(a, b)$
$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$F_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	$\sigma^2$	$\mu$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים : p ההסתברות להצלחה 1-p=q ההסתברות לכשלון x : מספר ההצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$pq^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	גיאומטרי $G(p)$
$e^{\lambda(e^t - 1)}$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	x : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים 0, 1, ..., ∞	פואסוני $Pois(\lambda)$

## פרק 37 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

### רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:  $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
- אם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:  $M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

### תזכורת:

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	התפלגות
$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2}$	$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	אחיד $U(a, b)$
$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$F_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	$\sigma^2$	$\mu$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים: $p$ ההסתברות להצלחה $1-p=q$ ההסתברות לכשלון $x$ : מספר ההצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$pq^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. $x$ : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	גיאומטרי $G(p)$
$e^{\lambda(e^t-1)}$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$x$ : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$	פואסוני $Pois(\lambda)$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

נתון:  $X \sim P(\lambda = 4)$

$Y \sim P(\lambda = 2)$

X ו-Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של  $X-3$  ?

ב. נגדיר את  $T=X+Y$ . מה ההתפלגות של T?

**תרגילים:**

1. נתון ש  $X_i \sim p(\lambda)$  בלתי תלויים.

א. מצא את פונקציית יוצרת המומנטים של  $\sum_{i=1}^n X_i$

ב. הוכח ש  $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$

2. נתון:  $X \sim P(\lambda = 10)$

$Y \sim P(\lambda = 2)$

X ו-Y הינם בלתי תלויים.

נגדיר את  $T = X + Y$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. הוכיחו ש  $T \sim P(\lambda = 12)$

ג. הוכיחו ש  $X / T = 8 \sim B(8, \frac{5}{6})$  כלומר, ההתפלגות של X בהינתן ש  $T=8$  היא בינומית

עם הפרמטרים  $n=8$  ו-  $p = \frac{5}{6}$ .

3. יהי  $X_i \sim \exp(1)$   $i = 1, 2, \dots, n$  והמשתנים הם בלתי תלויים. נגדיר את  $T = \sum_{i=1}^n X_i$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T.

ג. יהי  $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$  כלומר התקנון של T. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z.

4. נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי הנוסחה הבאה :

$$M_X(T) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \text{לכל } t$$

כאשר :  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

א. הוכח שאם  $Y=2X$  אזי  $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$

ב. הוכח שאם  $T = X_1 + X_2$  ו- $X_1$  ו- $X_2$  בלתי תלויים מאותה התפלגות נורמלית אז

מתקיים ש :  $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$

## פרק 38 - נוסחת התוחלת השלמה

### רקע:

אם נוזהה שהתפלגות של משתנה  $X$  תלויה במשתנה אחר  $Y$  מתקיים ש :

$$E(X) = E[E(X/Y)]$$

עבור משתנה  $Y$  בדיד כלשהו :

$$E(X) = \sum_y E(X | Y = y) \cdot P(Y = y)$$

עבור משתנה  $Y$  רציף כלשהו :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X | Y = y) \cdot f(y) dy$$

### דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה. בכיתה מספר 1 : 10 בנים ו- 20 בנות.

בכיתה מספר 2 : 15 בנים ו- 15 בנות. המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי. יהי  $X$  מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו. יש לחשב את  $E(X)$ .

### תרגילים:

1. בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.
2. מטילים  $n$  מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש. כעת מטילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות  $n$  את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.
3. בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב-15 ₪. אחרת זוכים ב-50 ₪. חשבו את תוחלת סכום הזכיה.
4. נתון ש  $Y/X \sim U(0, X)$  כאשר פונקציית הצפיפות של  $X$  הינה:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 2 \leq x \leq 6 \\ 0.2 & 6 < x \leq 9 \\ 0 & \text{אחר } t \end{cases}$$

חשבו את  $E(Y)$ .

5. בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא. נקודה C המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- $X$  את זמן ההגעה לנקודת הסיום. חשבו את  $E(X)$ .



**פתרונות:****שאלה 1**

4.4

**שאלה 2** $\frac{n}{4}$ **שאלה 3**

46.4

**שאלה 4**

3.05

**שאלה 5**

5

## פרק 39 - משתנה מקרי דו ממדי רציף

### רקע:

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום  $R$  מסוים.  
 פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי  $f(x, y)$ .  
 פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

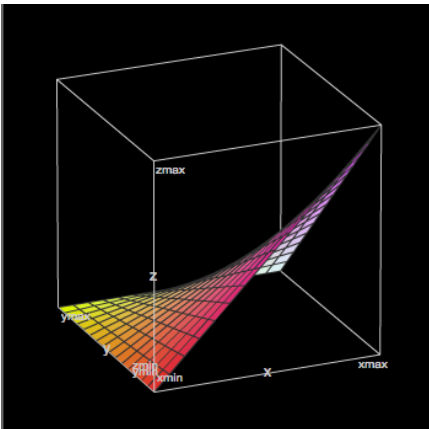
$$1 \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{לכל } (x, y) \in R$$

$$2 \quad \iint_R f(x, y) dx dy = 1$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

הראה שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.



**פונקציית צפיפות שולית:**פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  תקבל באופן הבא :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

פונקציית הצפיפות השולית של  $Y$  תקבל באופן הבא :

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא לפונקציית הצפיפות :

את פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  וחשב את  $E(X)$  דרכה.

**אי תלות בין משתנים רציפים**

$X$  ו- $Y$  יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  בתחום ההגדרה שלהם,  $R$

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) : \text{מתקיים ש}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

האם  $X$  ו- $Y$  המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

### חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי

הנפח הכלוא מתחת למשטח  $f(x, y)$  בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש  $X$  ו  $Y$  יהיו בתחום

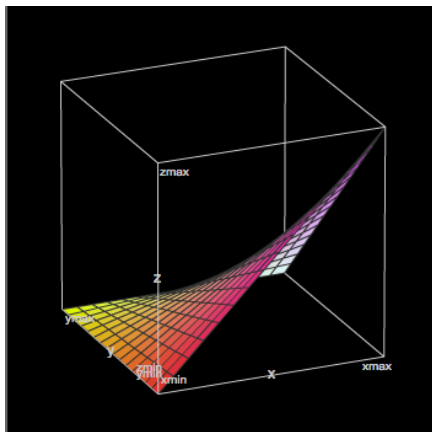
$$P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{הזה:}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

חשב את הסיכוי  $P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$ .



### פונקציית התפלגות מצטברת משותפת

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים :

$$F(s, t) = P(X \leq s \cap Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f(x, y) dx dy$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת ועל פיה חשב את הסיכוי :  
 $P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$

## פונקציית צפיפות מותנית

אם ל-  $X$  ול-  $Y$  ישנה פונקציית צפיפות משותפת  $f(x,y)$  אז מגדירים את פונקציית הצפיפות

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \quad \text{על ידי } f(y) > 0$$

ובאופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של  $Y$  בהינתן ש  $X = x$  לכל ערכי  $x$  המקיימים

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \quad \text{על ידי } f(x) > 0$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

מצא את  $f(x|y)$

## תוחלת מותנית

ל-  $X$  ול-  $Y$  ישנה פונקציית צפיפות משותפת  $f(x,y)$ .

התוחלת של  $X$  בהינתן ש  $Y = y$  תהיה :  $E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{-\infty} x \cdot f(x | y) dx$

ובאופן דומה, התוחלת של  $Y$  בהינתן ש  $X = x$  תהיה :  $E(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{-\infty} y \cdot f(y | x) dy$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

מצא את  $E(X | Y)$



**תרגילים:**

1. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = x + y$  המוגדרת בתחום שבו  $0 \leq x \leq 1$  וגם  $0 \leq y \leq 1$ . הוכח שמדובר בפונקציית צפיפות.

2. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = Ax(x - y)$  המוגדרת בתחום שבו  $0 \leq x \leq 2$  וגם  $-x \leq y \leq x$ . מצא את ערכו של הפרמטר A.

3. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = \frac{(x \cdot y)^3 + x \cdot y}{C}$  המוגדרת בתחום שבו  $0 \leq x \leq 1$  וגם  $0 \leq y \leq 1$ .

א. מצא את ערכו של C.

ב. מצא את  $f(y)$ .

ג. האם X ו-Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = \frac{1}{800}$  המוגדרת בתחום שבו  $60 \leq x \leq y$  וגם  $60 \leq y \leq 100$ .

א. הראה שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

ג. חשב את  $E(X)$  ו- $V(X)$ .

ד. האם X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשב את מקדם המתאם בין X ל-Y.

ו. חשב את הסיכוי:  $P(Y > X + 10)$ .

5. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = \lambda\mu \cdot e^{-(\lambda x + \mu y)}$ . המוגדרת בתחום שבו  $x, y > 0$ .

- מצאו את פונקציית הצפיפות של  $X$  ואת פונקציית הצפיפות של  $Y$ .
- האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים תלויים?
- מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ ?
- חשב את הסיכוי:  $P(Y > X)$ .

6.  $Y$  הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע  $[2, 4]$ .

בנוסף נתון ש  $X$  הינו משתנה מקרי רציף המקיים:

$$f(x|y) = \frac{2x}{y^2} \quad 0 \leq x \leq y$$

מצא את השונות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

7. נתונים שני משתנים מקרים רציפים:  $X$  ו- $Y$ . פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא:

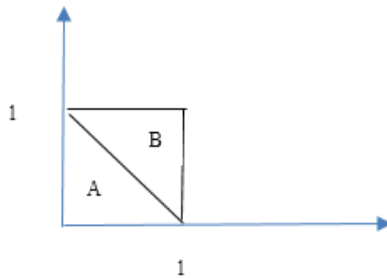
$$f(x, y) = \begin{cases} x & 0 < y < 1 \quad 1 - y \leq x \leq 1 + y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- מצא את  $f(x)$ .
- מצא את  $f(y|x)$ .
- מצא את  $E(Y|X)$ .

8. יהי  $X$  ו- $Y$  משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו:  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$ ,  $(-1,2)$ .

- רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
- מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  ושל  $Y$ .
- חשבו את התוחלת של  $X$  ושל  $Y$ .
- האם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי מתואמים?
- האם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי תלויים?

9. פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:  
הצפיפות על פני משולש  $A$  הינה 1.5 ואילו הצפיפות על פני משולש  $B$  היא 0.5.



- האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?
- מצא את  $f(x)$ .
- מצא את  $f(x|y)$ .

10. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת  $f(x,y) = cx$  פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו

$$0 \leq x \leq 1 \text{ וגם } 0 \leq y \leq x^2.$$

- מצאו את הקבוע  $C$ .
- חשבו את ההסתברות ש  $6Y < 1 - X$ .

11. נתונים  $X$  ו- $Y$  שני משתנים מקריים רציפים כך ש:  $Y \sim U(0,1)$  ו-

$$X | Y = y \sim U(0, \sqrt{y})$$

חשב את  $E(Y | X = 0.5)$

12. נתונה פונקציית הצפיפות  $f(x, y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$  בתחום שבו  $x, y \geq 0$ . חשבו את הסיכוי  $P(X < Y)$ .

13. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת:  $f(x, y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$  פונקציה זו מוגדרת לרביע הראשון.

חשבו את  $P(X > 1 | Y = 2)$ .

14. יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל 9:00. נניח שבזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה. מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ 10 דקות?

15. נתונים שני משתנים מקרים רציפים:  $X \sim N(Y, 1)$  ו  $Y \sim U(0, 2)$ .

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .

ב. מצאו את  $E(X^2 | Y)$ .

ג. מצאו את  $E(X)$ .

16. פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$  היא:  $f(x, y) = 1$  פונקציה זו מוגדרת בתחומי  $0 \leq x, y \leq 1$

$$E(|X - Y|^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{הוכח ש:}$$

17.  $X \sim \exp(1)$  וכמו כן  $Y \sim \exp(1)$  הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את  $Z = \frac{X}{X+Y}$ . הוכח:  $Z \sim U(0, 1)$ .

פתרונות:שאלה 2:

$$A = \frac{1}{8}$$

שאלה 3:

א.  $\frac{5}{16}$

ב.  $f(y) = 0.8y^3 + 1.6y$

ג. תלויים.

שאלה 4:

א. הוכחה

ב.  $f(y) = \frac{y-60}{800}$

ג.  $E(X) = 73\frac{1}{3}$      $V(X) = 88\frac{8}{9}$

ד. לא.

ה. 0.5

ו. 0.5625

שאלה 5:

א.  $f(y) = \mu e^{-\mu y}$      $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

ב. לא.

ג. 0

ד.  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

שאלה 6:

$$\frac{2}{9}$$

שאלה 7:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq x < 1 \quad 1-x < y < 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 \leq x \leq 2 \quad x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$E(y|x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

שאלה 8:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 1+x < y < 1-x \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$E(X) = -\frac{2}{3} \quad E(Y) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. כן.

ה. לא.

**שאלה 9:**

א. כן.

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 - x & 1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{1.5}{1.5-y} & 0 \leq x < 1-y \\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחר ת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 10:**

א. 4

ב. 0.0947

**שאלה 11:**

$$\frac{7}{12}$$

**שאלה 12:**

$$\frac{1}{3}$$

**שאלה 13:**

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

**שאלה 14:**

$$\frac{25}{72}$$

**שאלה 15:**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.}$$

ב.  $y^2 + 1$

ג. 1

**שאלה 16:**

הוכחה.

**שאלה 17:**

הוכחה.



## פרק 40 - קונבולוציה

### רקע:

$X$  ו- $Y$  יהיו שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם :  $T = X + Y$ , שגם הוא משתנה מקרי.

אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות  $f_X$  ו- $f_Y$ , פונקציית הצפיפות של  $T = X + Y$ , תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y) dy$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון :  $X \sim \exp(1)$  כמו כן  $Y \sim \exp(2)$ . מצא את פונקציית הצפיפות של  $T = X + Y$ .

**תרגילים:**

1. נתון ש  $Y, X \sim \exp(\lambda)$ . כמו כן ידוע ש  $X$  ו-  $Y$  בלתי תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של  $X + Y$ .

2. נתון ש  $X$  ו-  $Y$  משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית הוכח ש  $T = X + Y$  מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3. סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל 3 שעות. כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב-  $Z$  את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.  
 א. מצא את פונקציית הצפיפות של  $Z$ .  
 ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ- 4 שעות?

4.  $X$  ו-  $Y$  משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות:

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

מצא את פונקציית הצפיפות של  $X + Y$ .

5.  $X$  ו-  $Y$  משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה:  $X \sim U(2,3)$  ו-  $Y \sim U(1,5)$ .

א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?  
 ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6.  $X, Y, Z$  מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל-1. מצא את פונקציית הצפיפות של  $X + Y + Z$ .
7. הוכח את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף. (רמז: העזר בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

פתרונות :שאלה 1

$$f_T(t) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t \quad t \geq 0$$

שאלה 2

הוכחה

שאלה 3

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{1-z}) & 1 \leq z \leq 3 \\ \frac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}) & z > 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad .א$$

ב. 0.841

שאלה 4

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(t+3)^2 & -3 \leq t \leq -2 \\ \frac{1}{8}(2 - (t+1)^2) & -2 < t < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8}(2 - (t-1)^2) & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

שאלה 5

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{4} & 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4} & 4 < t < 7 \\ \frac{8-t}{4} & 7 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad .א$$

ב. 4.5

שאלה 6

$$f_w(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & 0 \leq w \leq 1 \\ -w^2 + 3w - 1.5 & 1 < w < 2 \\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

שאלה 7

הוכחה

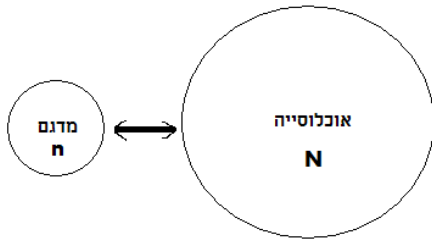
## פרק 41 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

### רקע:

אוכלוסייה – קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.

למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם – חלק מתוך האוכלוסייה.



למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.

הדגימה בקורס תהייה דגימה מקרית הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי – גודל המחושב על המדגם.

פרמטר – גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים

למשל:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	
$\mu$	$\bar{X}$	ממוצע
P	$\hat{p}$	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים . הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

**תרגילים :**

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".

נגדיר את  $x$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	50
1	250
2	350
3	300
4	50
	סך הכול $N = 1000$

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

3. נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה ?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

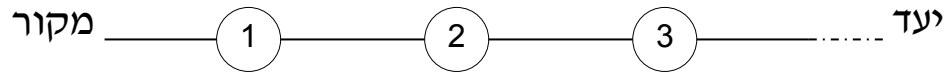
ד. מהו הסטטיסטי?



## פרק 42 - מערכות חשמליות

### רקע:

מערכת חשמלית בטור הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:

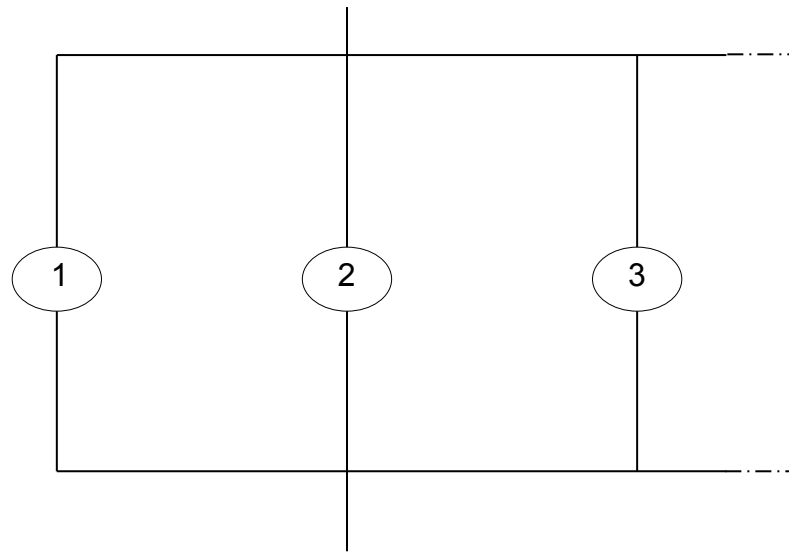


נסמן ב  $A_i$  את המאורע: רכיב  $i$  פועל.

כדי שהמערכת כולה תפעל צריך להתקיים ש  $\bigcap_{i=1}^n A_i$

מערכת חשמלית במקביל הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:

### מקור



יעד

כדי שהמערכת החשמלית כולה תפעל צריך להתקיים ש:  $\bigcup_{i=1}^n A_i$

**דוגמא:** הפתרון בהקלטה.

במערכת חשמלית 4 רכיבים בלתי תלויים שלכל אחד מהם סיכוי  $P$  לפעול. בטאו באמצעות  $P$  את

הסיכוי שהמערכת תפעל.

א. כל הרכיבים מחוברים בטור זה לזה.

ב. כל הרכיבים מחוברים במקביל זה לזה.

**תרגילים :**

1. נתונים שלושה רכיבים חשמליים המחוברים בטור. אורך החיים של כל מכשיר מתפלג באופן הבא :

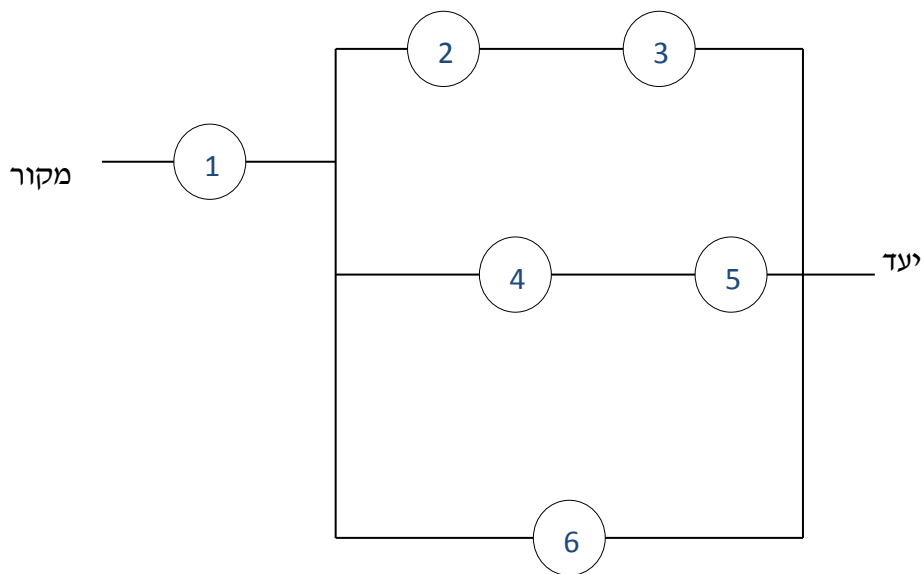
$$X_1 \sim U(2,4)$$

$$X_2 \sim N(3,1)$$

$$X_3 \sim \exp(1)$$

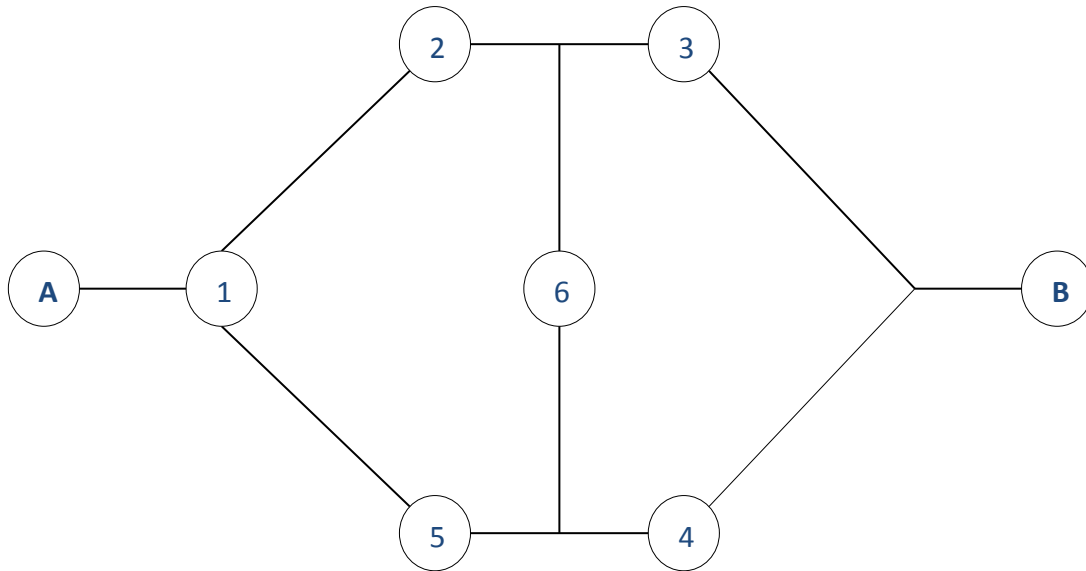
כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. כל הרכיבים הופעלו כעת. מה הסיכוי שבעוד 3 שעות המערכת תפעל?

2. המערכת החשמלית הבאה מכילה 6 רכיבים כמוראה בשרטוט :



כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. רכיבים מספר 1, 2, 6 פועלים בסיכוי 0.9. רכיב מספר 3 פועל בסיכוי 0.8. רכיבים מספר 4, 5 פועלים בסיכוי P. מצא את P אם הסיכוי שהמערכת תפעל הוא 0.887148.

.3

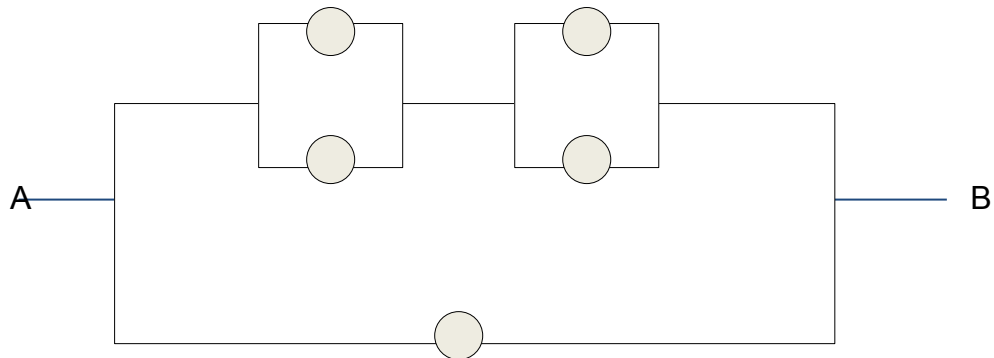


בין שני המחשבים A ו-B נמצאים 6 שרתים כמוראה בשרטוט. כל אחד מהשרתים תקין בסיכוי 0.9. על מנת שהודעה תצליח לעבור ממחשב A ל-B צריך להיות לפחות מסלול אחד שבו כל השרתים תקינים.

א. מה ההסתברות לכך שההודעה תעבור בהצלחה ממחשב A ל-B?

ב. ההודעה לא הצליחה לעבור ממחשב A למחשב B. מה הסיכוי ששרת מספר 1 לא תקין?

4. נתונה המערכת החשמלית הבאה:



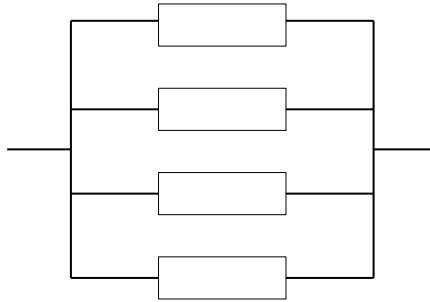
כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות  $p$ .

כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.

הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P + (1 - P)(2P - P^2)^2$$

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



- על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.  
 אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.  
 ג. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?  
 ד. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא  $K$  ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של  $A$  ₪.  
 מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

**פתרונות :****שאלה 1**

0.1245

**שאלה 2**

0.7

**שאלה 3**

א. 0.880632

ב. 0.837745

**שאלה 5**

א. 0.8403

ב.  $0.0588A > K$

### פרק 43 - התפלגות מינימום ומקסימום

**רקע:**

**התפלגות מקסימום:**

נניח ש-  $X_i$  הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

מתקיים ש :

$$F_U(t) = (F_X(t))^n$$

ולכן :

$$f(u) = n \cdot (F_X(u))^{n-1} \cdot f_X(u)$$

**התפלגות מינימום:**

נניח ש-  $X_i$  הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

מתקיים ש :

$$F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$$

$$f(z) = n \cdot [1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_X(z) : \text{ ולכן}$$

**דוגמה:** (הפתרון בהקלטה)

$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \min(x_i) \sim \exp(n\lambda) : \text{ הוכח ש}$$

**תרגילים:**

1. א. הוכח שאם  $X_i$  מתפלג רציף עבור כל  $i = 1, 2, \dots, n$  באופן בלתי תלוי עם פונקצית צפיפות  $f(x)$

$$\text{ו- } Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

$$\text{מתקיים ש: } f(z) = n[1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_X(z)$$

ב. הוכח שאם  $X_i$  מתפלג רציף עבור כל  $i = 1, 2, \dots, n$  באופן בלתי תלוי עם פונקצית צפיפות

$$\text{ו- } U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ו- } f(x)$$

$$\text{מתקיים ש: } f(u) = n \cdot (F_X(u))^{n-1} \cdot f_X(u)$$

2. אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.

א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקצית ההתפלגות

המצטברת של אורך חיי מכשיר.

ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.

ג. מה התוחלת והשוונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב'?

3. בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8

הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.

א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?

ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?

4. שלושה אנשים משתתפים בתחרות ריצה של 100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן

שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.

א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?

ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?

ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצא את התוחלת והשוונות שלו?

5.  $X_1, X_2$  מתפלגים נורמאלית סטנדרטית. נגדיר את  $Z = \min(X_1, X_2)$  ואת  $Y = \max(X_1, X_2)$

$$\text{א. חשב } P(Z > 1)$$

$$\text{ב. חשב } P(Y > 1)$$

$$\text{ג. חשב } P(Y > 1 / Y > 0)$$



6. רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית. משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.  
א. מצא את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.  
ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

7. נתון ש:  $X \sim \exp(\lambda)$  ו-  $Y \sim \exp(\mu)$ . כמו  $x, y$  בלתי תלויים. הוכח ש  

$$U = \min(x, y) \sim \exp(\mu + \lambda)$$

8.  $X_1$  ו-  $X_2$  שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1. נגדיר  

$$Y = \max(x_1, x_2)$$
חשב את  $P(Y > 0.5)$

9. נתון ש  $X_i \sim U(0, 2)$  בלתי תלויים זה בזה כאשר  $i = 1, 2, \dots, 5$ . מצא את פונקציית הצפיפות של  

$$T = \max(X_i)$$

10. נתון משתנה מקרי  $X$  בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר את  $W = \max(X_i)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, 10$  חשב את  $E(W)$

**פתרונות:****שאלה 1**

הוכחה

**שאלה 2**

ג. תוחלת : 10

שונות : 100

**שאלה 3**

א. 0.9817

ב. 0

**שאלה 4**

א. 0.421875

ב. 0.216

ג. תוחלת : 11.5 שונות : 0.15

**שאלה 5**

א. 0.02518

ב. 0.2922

ג. 0.3896

**שאלה 6**

א. 0.9328

ב. 0.2898

**שאלה 7**

הוכחה

**שאלה 8**

0.75

**שאלה 9**

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^4$$

**שאלה 10**30

31

## פרק 44 - התפלגות הדגימה

ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם :  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב  $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב-  $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ . תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשך הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**ג. משפט הגבול המרכזי**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק גדול ( $n \geq 30$ )

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

**תרגילים :**

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
<b>סך הכול</b>	

x להיות מספר המקלטים של

נגדיר את

משפחה אקראית.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של x.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

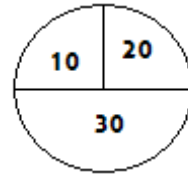
4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם  
 א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?  
 נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.  
 ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?  
 ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?  
 ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?  
 ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.  
 א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?  
 ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?  
 ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?  
 ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.  
 א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?  
 ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?  
 ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?  
 ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.  
 א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?  
 ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?  
 ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?  
 ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?  
ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11. מטיילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?

12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	P(X)

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם  $\bar{X}$  :

לכן  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה : ( בחר בתשובה הנכונה )

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש  $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :  
( בחר בתשובה הנכונה )

א.  $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב.  $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד.  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  אזי :

( בחר בתשובה הנכונה )

א.  $\mu$  ו-  $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו  $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו  $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו  $\bar{X}$  יהיו קבועים.



17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.  
 א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?  
 ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19. מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20. הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$  ומבצעים מדגם בגודל  $n$  של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

**פתרונות:****שאלה 2**

א.

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

ב.  $\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973$

ג.  $\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$

$\sigma(\bar{X}) = 0.486$

**שאלה 3**

$\mu_{\bar{x}} = 3.5$

$\sigma(\bar{X}) = 1.21$

**שאלה 4**

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

**שאלה 6**

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

**שאלה 7**

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

**שאלה 8**

א. 0.5468

ב. 0.6826

**שאלה 9**

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

**שאלה 10**

0.0475

**שאלה 11**

0.1814

**שאלה 12**

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

**שאלה 14**

התשובה ב

**שאלה 15**

התשובה ד

**שאלה 16**

התשובה ג

**שאלה 17**

א. 2.429

ב. 0.25

**התפלגות סכום תצפיות המדגם ומשפט הגבול המרכזי**

**רקע:**

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה.

כלומר, היו  $X_1, \dots, X_n$  - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה  $\mu$  ושונותה  $\sigma^2$  אזי:

**א. התוחלת והשונות של סכום התצפיות:**

$$E(T) = n\mu$$

$$V(T) = n\sigma^2$$

**ב. דגימה מתוך התפלגות נורמלית:**

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad \text{אזי}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{אם}$$

**ג. משפט הגבול המרכזי:**

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

אם  $X$  מתפלג כלשהו וידוע

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30)

$$T \rightsquigarrow N(n\mu, n\sigma^2)$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורתיהם לסניף בנק.

- א. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?  
 ב. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים? (0.1587)

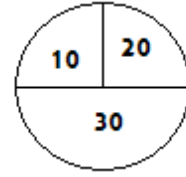
**תרגילים:**

1. המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.  
 א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?  
 ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?  
 ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
2. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.  
 א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?  
 ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?  
 ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב הייתה משתנה?
3. בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב 4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.  
 א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?  
 ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
4. במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

$x$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

- נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור ( אין צורך בתיקון רציפות).  
 א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?  
 ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5. בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.  
 א. אם האדם משחק את המשחק 50 פעמים מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050

שקלים ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק את המשחק 50 פעם עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה

ב- 1050 שקלים ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

6. נתון ש  $X_i \sim \exp(\lambda = 1)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, 100$ ,

$$P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$$

7. אורך חיי סוללה בשעות הוא בעל פונקציה הצפיפות הבאה :

$$f(x) = 2x \quad 0 < x < 1$$

ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

**פתרונות:****שאלה 1**

א. 0.6915

ב. 0.8413

ג. 0.5

**שאלה 2**

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל

ב. 0.0062.

**שאלה 4**

א. 0.883

**שאלה 5**

א. 0.8997

ב. תוחלת : 1.111 שונות 0.1239

**שאלה 7**

56

## התפלגות מספר ההצלחות במדגם - הקרוב הנורמלי להתפלגות הבינומית

### רקע:

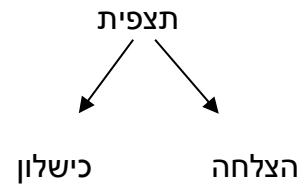
#### תזכורת על התפלגות בינומית

בפרק זה נדון על התפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).

מספר ההצלחות במדגם נסמן ב  $Y$ .

מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.

כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).



הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר  $p$  וכישלון יסומן ע"י הפרמטר  $q = 1 - p$ .

מבצעים מדגם אקראי בגודל  $n$ .

$$Y \sim B(n, p)$$

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:  $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

תוחלת:  $E(y) = np$

שונות:  $V(y) = npq$

#### קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



אם לפנינו התפלגות בינומית :  $Y \sim B(n, p)$  ומתקיים ש :

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז : } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

### תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות .  
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.  
על פי הכללים הבאים :

$$1. p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

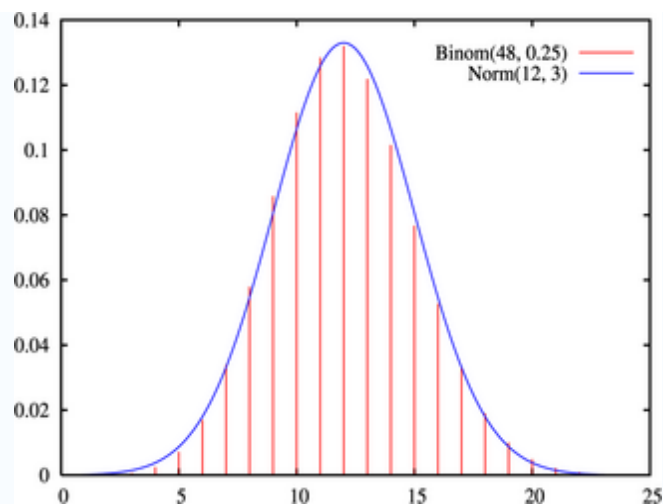
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שפשוט התנאי שהם נותנים הוא:  $(n \geq 30)$ .
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים ( בדרך כלל מעל 100 תצפיות) אני בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק ( בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

### דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

- מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
- מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



### תרגילים:

1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
- א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
- ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
- ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
2. במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
- א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
- ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
3. ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
4. מטילים מטבע 50 פעמים.
- א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
- ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
5. במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
- א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
- ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
6. מפעל לייצור ארטיקים טוען ש הסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
7. מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

### פתרונות:

### שאלה 1

א. 0.201

ב. 0.3758

ג. התוחלת : 2, סטיית התקן : 1.2649

**שאלה 2**

א. 0.9332

ב. 0.6915

**שאלה 3**

0.1611

**שאלה 4**

א. 0.9406

**שאלה 5**

א. 0.015

**שאלה 6**

0.9996

**שאלה 7**

0.8643

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם

**רקע:**

בפרק זה נדון על התפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.

$Y$  - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם)

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם (למשל, שיעור המובטלים במדגם)}$$

למשל,

$$n = 200$$

מספר המובטלים :  $Y = 20$

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב-  $p$  את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב-  $q$  את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.

נבצע מדגם מקרי ( הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

**התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:**

$$E(\hat{P}) = p$$

$$V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

**משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:**

אם  $np \geq 5$  &  $nq \geq 5$  אזי  $\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

**הערות:**

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$n \cdot p \geq 5 \quad 1.$$

$$n \cdot (1 - p) \geq 5 \quad 2.$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$n \cdot p \geq 10 \quad 1.$$

$$n \cdot (1 - p) \geq 10 \quad 2.$$

- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי:  $(n \geq 30)$ .

- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.
  - כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.
- דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית  $\hat{p}$  של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

**תרגילים:**

1. במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
  - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
  - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
  - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
  
2. נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש.
 

חשבו את ההסתברויות הבאות:

  - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - ג. יותר מ – 27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  
3. לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון".
 

נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

  - א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל 40% יש סמארטפון?
  - ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
  - ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
  - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
  
4. נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
  - א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
  - ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמתית ביותר מ-4%?
  - ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
  - ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
  
5. נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ל"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6. נתון ש  $X \sim B(n, p)$  נגדיר את המשתנה הבא :  $\hat{P} = \frac{X}{n}$ .

א. הוכיחו ש :

$$E(\hat{P}) = p$$

$$V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

ב. מה  $p$  המביא את  $V(\hat{P})$  להיות במקסימום?



**פתרונות:****שאלה 1**

א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064

ב. 0.5

ג. 0.3446

**שאלה 2**

א. 0.0618

ב. 0.0618

ג. 0.8238

**שאלה 3**

א. 0.5

ב. 0

ג. 0.8968

ד. גדלה

**שאלה 4**

א. 0.0062

ב. 0.0456

**חוק המספרים הגדולים****רקע:**

חוק המספרים הגדולים מתייחס להשפעת הגדלת גודל המדגם על הסיכוי של פרופורציית המדגם (או ממוצע המדגם) להיות קרובה מהפרופורציה האמתית (או מהממוצע האמתי).

**החוק לגבי פרופורציה:**

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה אינסופית בה פרופורציית ההצלחות היא  $p$ , ככל שהמדגם גדול יותר:

כך הסיכוי שפרופורציית המדגם ( $\hat{p}$ ) תהיה בקרבת הפרופורציה באוכלוסייה ( $P$ ) גבוה יותר.

ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהפרופורציה של האוכלוסייה קטן יותר.

בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הפרופורציה באופן הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n = P$$

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.

את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא:

$$P(|\hat{P} - P| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

**הערה:**

ככל שהמדגם גדל הסיכוי שפרופורציית המדגם תהיה בדיוק הפרופורצייה האמתית הולך וקטן.

**החוק לגבי ממוצע:**

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך התפלגות שבה התוחלת  $\mu$  והשונות סופית,

ככל שהמדגם גדול יותר:

כך הסיכוי שממוצע המדגם ( $\bar{X}$ ) יהיה בקרבת הממוצע באוכלוסייה ( $\mu$ ) גבוה יותר.

ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהממוצע של האוכלוסייה קטן יותר.

בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הממוצע באופן הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$$

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.

את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא:

$$P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת.

איזה סיכוי יותר גבוה?

1. במדגם בגודל 100 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורצייה האמתית בלא יותר מ- 4%

2. במדגם בגודל 200 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורצייה האמתית בלא יותר מ- 4%

הסבר .

**תרגילים:**

1. באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכויי יותר גבוה ?  
 א. אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.  
 ב. שניים מתוך עשרה יהיו מובטלים.  
 הסבר וחשב.
2. באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכויי יותר גבוה ?  
 א. לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים  
 ב. לפחות 30 מתוך 100 יהיו מובטלים  
 הסבר
3. גובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. דוגמים 4 אנשים באקראי.  
 א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה מעל 176 ס"מ.  
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם? נמק.
4. ידוע שבהצעת חוק מסוימת תומכים 60% מהציבור. נדגמו באקראי 10 אנשים.  
 א. מה ההסתברות שבדיוק 60% מהמדגם תומכים בהצעת החוק?  
 ב. כיצד התשובה הייתה משתנה אם היו דוגמים 20 אנשים?
5. שני חוקרים ביצעו מדגם מאותה אוכלוסייה. חוקר א דגם 20 תצפיות והשני דגם 40 תצפיות וכל אחד מהם חישב את ממוצע המדגם:  $\bar{X}_{20}$  ו-  $\bar{X}_{40}$ . ידוע שהתפלגות היא נורמלית ושהתוחלת באוכלוסייה הינה 500. בסעיפים הבאים נמקו אילו הסתברויות מהזוגות המוצגים גדולה יותר או שהן שוות ונמקו.  
 א.  $P(\bar{X}_{40} > 500)$  או  $P(\bar{X}_{20} > 500)$   
 ב.  $P(480 < \bar{X}_{40} < 520)$  או  $P(480 < \bar{X}_{20} < 520)$   
 ג.  $P(\bar{X}_{40} < 490)$  או  $P(\bar{X}_{20} < 490)$

6. נתון ש:  $X \sim G(P = 0.1)$  מבצעים מדגם אקראי בגודל  $n$  מההתפלגות הזו ומחשבים את

ממוצע המדגם:  $\bar{X}_n$ .

הוכח:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = 10$

פתרונות:שאלה 3:

א. 0.1151

ב. קטנה

שאלה 4:

א. 0.2508

ב. קטן

שאלה 5:

$$P(\bar{X}_{40} > 500) = P(\bar{X}_{20} > 500) \quad \text{א.}$$

$$P(480 < \bar{X}_{40} < 520) > P(480 < \bar{X}_{20} < 520) \quad \text{ב.}$$

$$P(\bar{X}_{40} < 490) < P(\bar{X}_{20} < 490) \quad \text{ג.}$$

## פרק 45 - אי שוויונים הסתברותיים

### א. אי שוויון צ'ביצ'ב

1. מצא חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 .  
א.

$$p(2 < x < 14)$$

ב.

$$p(|x - 8| \geq 9)$$

2. מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונוותם 3 סמ"ר. יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

3. אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40% . נלקח מדגם מקרי בגודל 200 .  
תן חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל- 45% .

4. מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב 20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100 . העזר באי שוויון צ'ביצ'ב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

5. בוחרים מספר  $n$  ספרתי באופן מקרי. (הספרה ראשונה יכולה להיות 0)  
א. עבור  $n = 10$  : הערך את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

- ב. מה אורך המספר המינימלי ( $n$ ) שיבטיח שבהסתברות של 95% , ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75? לפי אי-שוויון צ'ביצ'ב.

6. בעיר מסוימת ל 5% מהמשפחות אין מכונית , ל-20% יש מכונית אחת , ל- 35% יש שתי מכוניות, ל- 30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות ביישוב הוא גדול מאד. הערך את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27 .

**ב. אי שוויון מרקוב**

1. אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשב לפי אי שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות .
2. התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות . הערך את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ- 15 משפחות.
3. ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 75.
  - א. מצא חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 85.
  - ב. נניח שהמרצה יודע בנוסף ששונות ציון מבחן הגמר של הסטודנט היא 25, מה אפשר לומר על ההסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה גבוה מ-65 ונמוך מ-85?



**תשובות סופיות - אי שוויונים הסתברותיים**

**פרק א' - אי שוויון צ'ביצ'ב**

<b><u>שאלה 2</u></b>	<b><u>שאלה 1</u></b>
לפחות 30	א. בין $3/4$ ל- 1
	ב. בין 0 ל- $1/9$
<b><u>שאלה 4</u></b>	<b><u>שאלה 3</u></b>
0.75	0.52
<b><u>שאלה 6</u></b>	<b><u>שאלה 5</u></b>
0.706	א. 0.825
	ב. 294

**פרק ב' - אי שוויון מרקוב**

<b><u>שאלה 2</u></b>	<b><u>שאלה 1</u></b>
לכל היותר 0.625	בין 0 ל- $1/3$
	<b><u>שאלה 3</u></b>
	א. 0.8823
	ב. לפחות 0.75

## פרק 46 - אמידה נקודתית

אומד חסר הטיה

רקע:

- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

המשתנה  $X$  הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	<b>X</b>
$4\theta$	$1-6\theta$	$2\theta$	<b>הסתברות</b>

מעוניינים לאמוד את  $\theta$  על סמך שתי תצפיות מההתפלגות:  $X_1$  ו- $X_2$

א. הראו שהאומד  $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$  הוא אומד מוטה ל- $\theta$ .

- הטיה של אומד היא:  $E(\hat{\theta}) - \theta$ , כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד  $T_1$ .

ג. תקנו את  $T_1$  כך שיהיה אומד חסר הטיה.

- אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא:  $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$ . האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג?

- אם  $\hat{\theta}$  אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אז  $g(\hat{\theta})$  יהיה אומד חסר הטיה עבור  $g(\theta)$  רק אם  $g$  תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל:  $P(X = 3)$ .

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} : \sigma^2 \quad \bullet \quad \text{אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה}$$

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של  $X$ .

תזכורות חשובות:

• אם  $Y = aX + b$  אזי:

$$\sigma_Y = |a|\sigma_X \quad V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad E(Y) = aE(X) + b$$

• אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

**תרגילים:**

1. הציון במבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת  $\mu$  וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת -  $\mu$ , נלקח מדגם של 5 ציונים  $X_1, \dots, X_5$ . שלושה חוקרים הציגו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציג:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציג:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציג:}$$

- א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?  
 ב. הצע תיקון לאומד המוטא כך שיהיה חסר הטיה.  
 ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי הטיה.  
 ד. איזה מבין שני האומדים חסרי הטיה עדיף? נמקו.

2. כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של  $2n$  נשים. נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$ . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטא.  
 ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3.  $X \sim B(n, p)$  כלומר  $X$  הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר  $P$  (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל  $n$ .  
 א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$ .  
 ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד.  
 ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$ .  
 ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$ .

4. בתיק מניות שתי מניות . מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר פרמטר לא ידוע  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2$ .

פונקציית ההסתברות של  $X$  – מספר המניות שיעלו ביום מסוים :

$$P(X = 0) = 1 - \frac{\theta}{2} \quad P(X = 1) = \frac{\theta}{3} \quad P(X = 2) = \frac{\theta}{6}$$

- א. מצאו אומד בלתי מוטה ל-  $\theta$  שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.  
 ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-  $\theta$  שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום במשך שלושה ימים  $X_1, X_2, X_3$  (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5. בקרב המטפלות בת"א מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מיקרי בעל התפלגות התלויה

בפרמטר  $\theta$  באופן הבא :

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא  $3\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא  $1 - 4\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב- 3 תינוקות הוא  $\theta$ .

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצא אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר  $\theta$  על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות :

א. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $5T$  אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $5\theta$ .

ב. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $T^2$  אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $\theta^2$ .

7. במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $p$ , מכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $2p$ . דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב-  $X$  את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,  $Y$  - מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל-  $p$  ?

א.  $\frac{X}{20}$

ב.  $\frac{Y}{20}$

ג.  $\frac{X+Y}{60}$

ד.  $\frac{2X+Y}{80}$

8. יהי  $T_1$  ו-  $T_2$  אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר  $\theta$ .

א. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\theta^2$  המתבסס על  $T_1$  ו-  $T_2$ .

ב. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\theta(1-\theta)$  המתבסס על  $T_1$  ו-  $T_2$ .

9. נתון ש  $X$  הינו משתנה מקרי עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . נדגמו  $n$  תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראה ש  $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  אומד חסר הטיה ל  $\mu$  כאשר  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות  $X_1 \cdot X_2$  הראה שהוא אומד חסרי הטיה ל-

$\mu^2$ .

10.  $X_i \sim N(\mu, 1)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$

נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\mu^2$ .

11. נתונות  $n$  תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{אחר } n \end{cases}$$

א. הראה כי האומד  $3\bar{X}$  הנו אומד בלתי מוטה ל  $\beta$ .

ב. מצא את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעל פונקצית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחר } n \end{cases}$$

א. בטא את ערכו של  $A$  באמצעות  $\theta$  כדי שפונקצית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצא אומד חסר הטיה ל- $\theta$  על סמך  $n$  התצפיות.

**פתרונות:****שאלה 1**

א.  $T_2$  ו-  $T_1$

ב.  $\frac{2}{3}T_3$

ג.  $T_2 = 110$   $T_1 = 76.6$

ד.  $T_1$

**שאלה 2**

ב.  $T_2$

**שאלה 3**

א.  $\frac{x}{n}$

ב.  $1 - \frac{x}{n}$

ג.  $x$

**שאלה 4**

א.  $\frac{3x}{2}$

ב.  $\frac{3\bar{x}}{2}$

**שאלה 5**

א.  $1 - \frac{x}{2}$

ג. 0.125

ה. לשונות 0.917

**שאלה 6**

א. נכון.

ב. לא נכון.

**שאלה 7**

תשובה: ב



**שאלה 8**

א.  $T_1 \cdot T_2$

ב.  $T_1 - T_1 \cdot T_2$

**שאלה 9**

הוכחה

**שאלה 10**

$$\overline{X}^2 - \frac{1}{n}$$

**שאלה 11**

ב.  $V(3\overline{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}$

**שאלה 12**

א.  $A = \frac{2}{\theta^2}$

ב.  $\theta = \frac{3}{2} \overline{X}$

## אומד נראות מקסימלית

### רקע

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש  $X$  משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות  $P(x, \theta)$ , כאשר  $\theta$  הפרמטר הבלתי ידוע.

יהי  $X_1, X_2, \dots, X_n$  תוצאות מדגם מקרי בגודל  $n$  הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם ולא את הפרמטר קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta)$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של  $\theta$ ) כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי, כלומר המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש  $\theta$ .

אם מדובר במשתנה רציף נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא  $p$  (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו. הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי. השחקן חוזר על התהליך שוב והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.

מצאו את פונקציית הנראות של  $p$ .

אומד נראות מקסימלית עבור  $\theta$  הוא האומד  $\hat{\theta}$  שממקסם את פונקצית הנראות  $L(\theta)$ , כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

### שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף  $\ln$  כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור  $\theta$ .

משפט: אם  $\hat{\theta}$  הוא אומד נראות מקסימלית עבור  $\theta$ , אזי  $g(\hat{\theta})$  הוא אומד נראות מקסימלית עבור  $g(\theta)$  בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו את אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

**תרגילים:**

1. הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא  $p$  (לא ידוע). השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה. נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
  - א. חשבו את פונקציית הנראות של  $p$  וציירו גרף שלה.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור  $p$ .
  - ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $p$  אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים עד אשר ניצח.
  
2. מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של  $\lambda$  לקוחות ביום.
  - א. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\lambda$  על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\lambda$  על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב-  $n$  ימים מסוימים.
  
3. הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ . דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם. התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7, 5 ו-3.
  - א. פתחו אומדן נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך  $n$  תצפיות כלשהן.
  - ב. מהו האומדן לפרמטר?
  
4. משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער ביום אחד מתפלג אחיד  $U(0, \theta)$ . כדי לאמוד את  $\theta$ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי בית באותו יום.
  - א. אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של  $\theta$  המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך התצפית.
  - ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1, 3, 1.5. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך המדגם הזה.
  - ד. מצאו באופן כללי אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך מדגם של  $n$  בני נוער -  $X_1, \dots, X_n$ .

5. הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות  $\sigma^2$  לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם  $X_1, \dots, X_n$  מ תצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 174, 165, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר P בהתפלגות הבינומית על סמך מדגם בגודל n בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7. X הוא משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$  על סמך n תצפיות בלתי תלויות:  $X_1, \dots, X_n$ .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta^2$ .

8. בכד א 10 כדורים שחורים ו 10 לבנים בכד ב 5 כדורים שחורים ו- 15 לבנים. דוגמים באקראי כדור אך אינך יודע מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9. הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10. מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מיקרי  $X$  בעל התפלגות התלויה בפרמטר  $\theta$  באופן הבא:

2	1	0	X
$1 - 4\theta + 4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$4\theta^2$	P(X)

- בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 1, 0, 0, 0 לקוחות ממתינים בתור.
- א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר  $\theta$  על-סמך המדגם הנתון.
- ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11. אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן שהסיכוי בו לתוצאה עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או זה שאינו הוגן.

- א. מצא אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.
- ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12. מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש 4 מהם מובטלים.

- א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.
- ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה
- ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13. במשחק מחשב שלוש רמות משחק :

ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.

ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.

ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.

יוסי בחר ברמה מסוימת אך אינו יודע איזו רמה הוא בחר. הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק על סמך מספר הפעמים שסיים את משחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

14.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מתפלגים אחיד בקטע  $[-\theta, \theta]$  מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר  $\theta$ .

15.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מתפלגים בדיד לפי פונקציה ההסתברות הבאה :

$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1 - (1-P)^2} \quad K = 1, 2$$

הוכח שא.נ.מ. ל-  $P$  הינו:  $2 - \frac{2}{X}$

16. במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא  $P$ . כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא של 30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור  $P$ .

ב. רשמו את האומדן שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של  $n$  מכשירים שמתוכם נמצאו  $Y$  מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי עם פי צפיפות

$$f(t) = \theta e^{-\theta t} \quad \text{עבור } t > 0$$

מצא א.נ.מ. עבור  $\theta$  המבוסס על  $Y$ . מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

17. חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס-החיוג האוטומטי נפסק.

א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה  $X$  - מספר הפעמים שהחיוג האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא  $P$ .

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות : בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו :

5,1,2,2,8,3,7,2,6,1

מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור  $P$  על סמך התוצאות שהתקבלו.



**פתרונות :****שאלה 1**

ב. 0.5

ג.  $\frac{2}{9}$ **שאלה 2**א.  $X$ ב.  $\bar{X}$ **שאלה 3**א.  $\frac{1}{\bar{X}}$ ב.  $\frac{2}{9}$ **שאלה 4**

א. 1

ג. 3

ד.  $X_{\max}$ **שאלה 5**

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n} \quad \text{א.}$$

ב. 40.2

**שאלה 6**

$$\frac{x}{n}$$

**שאלה 7**

$$\frac{n}{\sum X_i^2} \quad \text{א.}$$

$$\left( \frac{n}{\sum X_i^2} \right)^2 \quad \text{ב.}$$

**שאלה 8**

ב. כד א

**שאלה 9**

א. 32

ב. 0.3916

**שאלה 10**

א. 0.45

ב. 0.81

**שאלה 11**

ב. הוגן

**שאלה 12**

א. 0.08

ב. 0.92

ג. 11.5

**שאלה 13**

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 3 & X = 0,1 \\ 1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

ב. 1

$$\hat{p} = \begin{cases} 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 & X = 0,1 \\ 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 14** $\max |X_i|$ **שאלה 15**

הוכחה

**שאלה 16**

א. 0.6124

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{y}{n}} \quad \text{ב.}$$

ג. 0.49

**שאלה 17**

ב. 0.1818

**נספח****התפלגויות רציפות**

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. $\lambda$ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	$\mu$	$\sigma^2$	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

**התפלגויות בדידות**

אנ"מ	הערות	שונות	תוחלת	פונקציית ההסתברות $P(X = k)$	ההתפלגות
$\hat{p} = \frac{Y}{n}$	מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה	$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	בינומית $B(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$
$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$	מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$(1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, \dots, \infty$	גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \leq 1$
$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$	בחירה אקראית של מספר בין a ו-b.	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K=a, \dots, b$	אחידה $U(a, b)$
$\hat{\lambda} = \bar{X}$	מספר אירועים ביחידת זמן λ - קצב האירועים	$\lambda$	$\lambda$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, \infty$	פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$

## קריטריון MSE - תוחלת ריבוע הטעות

### רקע

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE. תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$V(\hat{\theta})$  - הינה שונות האומד.

$E(\hat{\theta}) - \theta$  - הינה ההטיה של האומד.

אם  $T_1$  ו-  $T_2$  הינם אומדים לפרמטר  $\theta$ . האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר כלומר, אם

$$MSE(T_1) > MSE(T_2) \text{ עדיף על } T_1.$$

### דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון משתנה  $X$  המתפלג אחיד רציף באופן הבא:  $X \sim U(3, \theta)$ . מוצעים שני אומדים לפרמטר  $\theta$

$$T_1 = 2X - 3 \text{ ו- } T_2 = \frac{3X - 3}{2}$$

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר  $\theta$ ?

**תרגילים :**

1. מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE) איזה אומד עדיף? הסבירו.

2. בעיר מסוימת בשוויץ בכל  $\theta$  דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת  $X$ .

א. הצע אומד חסר הטיה ל-  $\theta$  על סמך  $X$ .

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את  $\theta$  על סמך האומד:  $1.5X$  האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים של סעיף א או ב עדיף?

3. חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן הפרמטר  $P$ ). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי  $X$  מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט

$$\text{בין שני אומדים: } T_1 = \frac{X}{5} \text{ ו- } T_2 = \frac{X+1}{7}$$

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם  $P=0.5$ ?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם  $P=0.1$ ?

4. מספר השריפות המתרחשות בחודש אוקטובר בארץ מתפלג פואסונית עם תוחלת  $\lambda$ . נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10}$$

$X_i$  = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה- $i$ .

איזה מהאומדים עדיף לצורך אמידת הפרמטר  $\lambda$ ?

5. הוכח ש:  $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

**פתרונות :****שאלה 1**

זה עם השלוש תצפיות.

**שאלה 2**

א.  $2x$

ג. סעיף ב

**שאלה 3**

א.  $T_1$

ב.  $T_2$

ג.  $T_1$

**שאלה 5**

הוכחה



**אומד עקיב****רקע:**

יהי  $\hat{\theta}_n$  אומד לפרמטר  $\theta$  המתבסס על  $n$  תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב אם יתקיים ש:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$ .

- אם  $\hat{\theta}_n$  אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  ומתקיים ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$

אזי  $\hat{\theta}_n$  אומד עקיב ל- $\theta$ .

**דוגמה**: (פתרון בהקלטה)

הסבר מדוע  $\bar{X}$  אומד עקיב ל- $\mu$ .

- אם  $\hat{\theta}_n$  אומד נראות מקסימלית לפרמטר  $\theta$  מתקיים ש:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$ .

כלומר,  $\hat{\theta}_n$  אומד עקיב ל- $\theta$ .

**דוגמה**: (פתרון בהקלטה)

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית  $\frac{1}{X}$  אומר עקיב לפרמטר  $P$ .

**תרגילים:**

1. נתון כי  $X_i \sim U(0, \theta)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $2\bar{X}$  מוצע להיות האומד ל- $\theta$ .
  - א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.
  - ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.
  
2. נתון ש  $X \sim B(n, p)$  כמו כן נתון האומד ש:  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  הינו אומד ל- $p$ . הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל- $p$ .
  
3. אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב  $\lambda$  לשנה.
  - נגדיר את  $W_1, W_2, \dots, W_n$  סדרת זמנים בשנים של  $n$  נורות בלתי תלויות.
  - א. מהו אומד נראות המקסימלי עבור  $\lambda$ ? האם האומד עקיב?
  - ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים?
  
4. נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .
  - מצא אומד עקיב לפרמטר  $\sigma^2$  המתבסס על  $n$  תצפיות בלתי תלויות.

**פתרונות :****שאלה 1 :**

הוכחה.

**שאלה 2 :**

הוכחה.

**שאלה 3 :**

$$א. \frac{1}{\bar{W}}$$

$$ב. 1 - e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$$

**שאלה 4 :**

$$\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

אומד חסר הטיה יעיל ביותר - MVUE  
(Minimum- variance unbiased estimator)

**רקע:**

T יהיה MVUE אם מתקיים ש-T אומד חסר הטיה ל- $\theta$ , ובנוסף מתקיים ש:  $V(T) \leq V(\hat{\theta})$  לכל  $\hat{\theta}$  חסר הטיה אחר.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של  $\lambda$  בסניף A וקצב של  $2\lambda$  בסניף B. נדגמו  $n$  ימים מכל סניף ונבדק בכל יום:

$X_i$  - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום  $i$ .

$Y_j$  - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום  $j$ .

על מנת לאמוד את  $\lambda$  מוצע האומד:  $\alpha \bar{X} + \beta \bar{Y}$ .

א. מה התנאי שצריך להתקיים על  $\alpha$  ו- $\beta$  כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריך להיות  $\alpha$  ו- $\beta$  כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

**תרגילים:**

1.  $T_1$  ו- $T_2$  הינם אומדים חסרי הטויה ובלתי תלויים לפרמטר  $\theta$ .

$$T = aT_1 + bT_2 \quad \text{כמו כן נגדיר :}$$

א. מה צריך להיות התנאי על  $a$  ו- $b$  כדי ש- $T$  יהיה אומד חסר הטויה?

ב.  $\sigma_1^2$  ו- $\sigma_2^2$  הם השונות של  $T_1$  ו- $T_2$  בהתאמה. מצאו את  $a$  ו- $b$  כך ש- $T$  יהיה אומד חסר הטויה ל  $\theta$  ובעל שונות מינימלית.

2. במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק. תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה ואומנם השונות של כל מכונה שונות ומקיימות:

$$\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2 \quad \sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$$

הוחלט לדגום  $n$  חלקים מכל מכונה ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\bar{X}_i$  - יהיה הממוצע המתקבל במכונה  $i$ .

יהי  $W = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{X}_i$  האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים  $a_i$  כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי מוטה?

ב. נניח ש  $a_1 = a_2$ . מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

**פתרונות :****שאלה 1:**

$$a+b=1. \text{א.}$$

$$b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \text{ב.}$$

**שאלה 2:**

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 1. \text{א.}$$

$$a_1 = a_2 = 0.4 \quad \text{ב.}$$

$$a_3 = 0.2$$

## שאלות מסכמות באמידה נקודתית

תרגילים:

1. במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא  $P$ , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא  $P^2$  ובמכונה השלישית הסיכוי הוא  $2P$ . דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- $X$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה א. נסמן ב- $Y$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- $Z$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
- א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר  $P$ ?
- ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $P$  על סמך  $X$  ו- $Z$ .
- ג. אם התקבל ש- $X=6, Y=3$  מהו אומדן נראות מקסימלית ל- $P$ ?
2. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסוניית עם קצב של  $\lambda$  תאונות בחודש. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסוניית עם קצב של  $2\lambda$  תאונות בחודש. הוחלט לספור את מספר התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש. נסמן ב- $X$  את מספר התאונות בחודש בקטע א' ו ב- $Y$  בקטע ב'.
- א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר  $\lambda$  על סמך  $X$  ו- $Y$ .
- ב. מצאו אומד נראות מקסימלית לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש?
- ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- $\lambda$ ?
3. זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
- א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
- ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

4. בקזינו משחק בו 4 תאים ממוספרים מ 1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.

יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון:  $P$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר  $P$ .

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב. מצאו אומדן ל- $P$  על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה ל- $P$  מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

5. יהי  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1}, & 0 < x < \lambda, \theta > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א. מצא אחי"ה ל- $\lambda$  (כאשר  $\theta$  קבוע ידוע).

ב. מצא אני"מ ל- $\theta$  (כאשר  $\lambda$  קבוע ידוע).

ג. מצא אני"מ ל- $\lambda$  (כאשר  $\theta$  קבוע ידוע).

6.  $X$ -משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום  $(0, \theta)$

$Y$ -משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום  $(0, 2\theta)$

א. מצא אומדן חסר הטיה ל- $\theta$  המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.

ב. מוצע האומדן  $T_2 = X + 0.5Y$ , האם האומדן הנ"ל הוא חסר הטיה?

ג. איזה אומדן יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב?

ד. מצא אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$  על סמך  $X$ -ו- $Y$ .



7. נדגמו 2 תצפיות  $(X_1, X_2)$  בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר  $\theta$ .

ידוע כי  $X_1 \sim U(0, \theta)$  ;  $X_2 \sim U(0, a\theta)$  (כאשר  $a$  קבוע ידוע וחיובי).

א. מצא אנ"מ ל-  $\theta$  על סמך 2 התצפיות הנ"ל.

ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?

ג. מצא אחי"ה ל-  $\theta$  על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

**פתרונות:****שאלה 1:**

א.  $0 \leq P \leq 0.5$

ג. 0.345

**שאלה 2:**

א.  $\frac{x+y}{3}$

ג. כן

**שאלה 4:**

א.  $0 \leq P \leq \frac{1}{3}$

ב.  $\frac{1}{3}$

ג. 0.389

**שאלה 5:**

$$\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta} \bar{x} \quad \text{א. אחייה יהיה}$$

ב.

$$\hat{\theta} = \frac{n}{n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\hat{\lambda} = X_{\max} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 7:**

$$\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right) \quad \text{א.}$$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3} \theta$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18} \theta^2 \quad \text{ב.}$$

$$\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2) \quad \text{ג.}$$

**נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות**

**מודל בינומי**

נתון מדגם של משתנה בינומי  $X \sim B(n, p)$ .

א.נ.מ עבור  $p$  הוא  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  והוא גם א.ח.ה.

**מודל אחיד (בדיד)**

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים אחידים  $X_i \sim U(1, N)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $N$  הוא  $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  ואינו א.ח.ה.

**מודל פואסוני**

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים פואסוניים  $X_i \sim P(\lambda)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\lambda$  הוא  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  וגם א.ח.ה.

**מודל גיאומטרי**

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים גיאומטריים  $X_i \sim G(p)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $p$  הוא  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$  אינו א.ח.ה. וא.נ.מ עבור התוחלת  $\frac{1}{p}$  הוא  $\bar{X}$  והנו א.ח.ה.

## מודל נורמלי

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים נורמליים  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\mu$  הוא  $\hat{\mu} = \bar{X}$

כאשר  $\mu$  ידוע א.נ.מ עבור  $\sigma^2$  הוא  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  (אומד חסר-הטייה)

כאשר  $\mu$  לא-ידוע א.נ.מ עבור  $\sigma^2$  הוא  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  (אומד מוטה!!!)

אומד חסר-הטייה עבור  $\sigma^2$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

## מודל מעריכי

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים מעריכיים  $X_i \sim \exp(\theta)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\theta$  הוא  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$  -מהווה אומד מוטה. וא.נ.מ עבור התוחלת  $\frac{1}{\theta}$  הוא  $\bar{X}$  א.ח.ה.

## מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים אחידים  $X_i \sim U(0, \theta)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\theta$  הוא  $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \text{ א.ח.ה עבור } \mu \text{ הוא}$$

אומד חסר-הטיה עבור  $\sigma^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

## פרק 47 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה

### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי. מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה זה לבנות רווח סמך. נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$  : נקרא רמת בטחון או רמת סמך.

$$P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha \quad \text{כך ש:}$$

A - גבול התחתון של רווח הסמך

B - הגבול העליון של רווח הסמך

$$L = B - A \quad \text{אורך רווח הסמך}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

מהי אוכלוסיית המחקר?

מה המשתנה באוכלוסייה?

מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

מהו רווח הסמך?

מה אורך רווח הסמך?

מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקרה ש  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הפרמטר שנרצה לאמוד:  $\mu$

האומד נקודתי:  $\bar{x}$

התנאים לבניית רווח הסמך:

1  $X \sim N$  או  $n \geq 30$

2  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הנוסחה לרווח הסמך:

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה.

מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה.

נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.



שגיאת האמידה המקסימלית:

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\varepsilon$ -נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומדן יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון  $(1 - \alpha)$  גבוהה יותר כך  $z_{1-\alpha/2}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

### תרגילים :

1. חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800.
  - א. מי האוכלוסייה במחקר?
  - ב. מה המשתנה הנחקר?
  - ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - ד. מה רווח הסמך לפרמטר?
  - ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - ו. מה אורך רווח הסמך?
  - ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
  
2. מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנה את רווח הסמך.
  
3. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
  
4. דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?
  
5. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
  - א. ממוצע המדגם.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.
  
6. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
- ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
7. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
- ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5 ?
8. חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, מי מהמשפטים הבאים אינו יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
- ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
- ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
- ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.
9. חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל  $48 < \mu < 54$  מה נכון בהכרח:
- א.  $\mu = 51$
- ב.  $\bar{X} = 6$
- ג.  $\bar{X} = 51$
- ד. אורך רווח הסמך הינו 3.
10. איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה? (בחר בתשובה הנכונה)
- א. רמת הביטחון.
- ב. סטיית התקן באוכלוסייה.
- ג. מספר המשתתפים.
- ד. סטיית התקן במדגם.

11. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $63 < \mu < 83$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות. א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10. כמה תצפיות עליו היה לדגום? ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%. בנה את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

12. נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד:  $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$ . נרצה לאמוד את  $\mu$ . מצאו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת-בטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל:  $\bar{x} = 74$ .

$$(\text{Var}(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} : \text{תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה})$$

**פתרונות :****שאלה 2**

$$4920.6 < \mu < 4979.4$$

**שאלה 3**

$$223.42 < \mu < 236.58 \quad \text{א.}$$

$$222.16 < \mu < 237.84 \quad \text{ב.}$$

**שאלה 5**

$$102 \quad \text{א.}$$

$$3 \quad \text{ב.}$$

$$0.9544 \quad \text{ג.}$$

**שאלה 6**

$$83.5 < \mu < 4.42 \quad \text{א.}$$

ב. יקטן פי 2

ג. גדל

**שאלה 7**

$$87 \quad \text{א.}$$

$$5 \quad \text{ב.}$$

$$0.9544 \quad \text{ג.}$$

**שאלה 8**

$$139 \quad \text{א.}$$

$$21 < \mu < 25 \quad \text{ב.}$$

**שאלה 9**

התשובה היא : ב

**שאלה 10**

התשובה היא : ג

**שאלה 11**

התשובה היא : ד

**קביעת גודל מדגם באמידת תוחלת עם שונות אוכלוסייה ידועה**

**רקע:**

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$   
ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב בנוסחה הבאה:

$$n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87)

**תרגילים:**

1. משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
2. מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה. א. כמה מתגייסים יש לדגום? ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
3. יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95 כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

**פתרונות :****שאלה 1**

780

**שאלה 2**

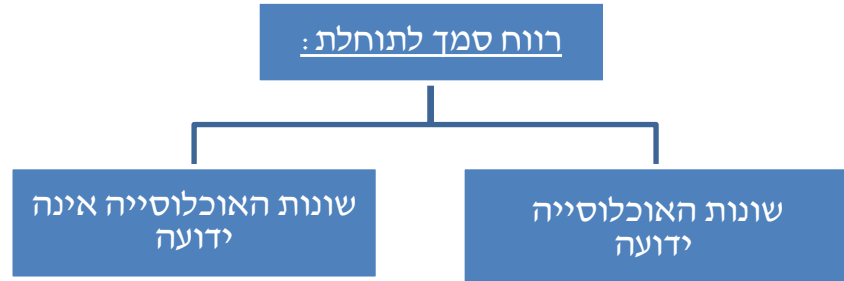
א. 139

ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.**שאלה 3** $n = 62$



רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה) כששונות האוכלוסייה אינה ידועה  
**רקע:**

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:



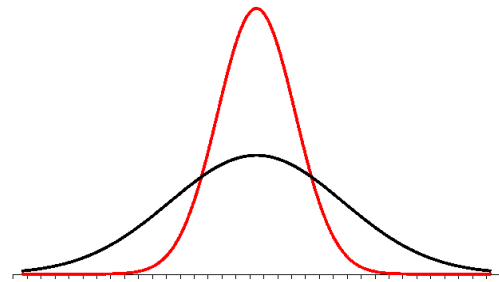
בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה ( $\sigma^2$ ) אינה ידועה לנו. מקרה יותר פרקטי.

התנאי:  $X \sim N$  או שהמדגם גדול

$$\text{רווח סמך: } \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.  
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו  
בדקות : 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.  
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

**פתרון :**

$$4.39 < \mu < 5.51$$

**תרגילים:**

1. מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב. א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל. ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק? ג. בהמשך לסעיף א, אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99% כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
2. במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי: גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן  $S=13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
3. אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 27, 34, 32, 40, 30. א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון? ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
4. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13. א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%. ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים. ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
5. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.
6. נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

7. שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך.

סטטיסטיקאי א : הניח  $\sigma = 20$

סטטיסטיקאי ב : חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$

למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר? (בחר בתשובה הנכונה)

א. סטטיסטיקאי א

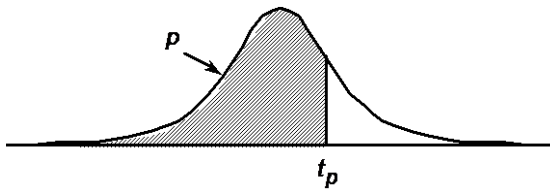
ב. סטטיסטיקאי ב

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח

הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?



P

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
$\infty$	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**פתרונות:****שאלה 1**

א.  $79.88 < \mu < 89.72$

ב.

**שאלה 4**

א.  $96.63 < \mu < 107.37$

ב.  $96.90 < \mu < 107.10$

**שאלה 5**

$3.149 < \mu < 3.351$

**שאלה 8**

90%

## פרק 48 - רווח סמך להפרש תוחלות ממדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה ידועות

**רקע:**

מטרה: לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך:

1.  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  ידועות.

2.  $X_1, X_2 \sim N$  או  $n_1, n_2 > 30$

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1-\alpha$  לא קיים הבדל בין התוחלות.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

נדגמו 100 תושבים מאזור a והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.

כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור b וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.

לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪.

אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור a לאזור b.

## תרגילים:

1. מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
  
2. ציוני I.Q. מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.
  - ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
  
3. חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?



**פתרונות :**

**שאלה 1**

(-20,90)

**שאלה 3:**

רמות בטחון הגבוהות מ : 0.9476

כששוננויות האוכלוסייה אינן ידועות אך שוות והמדגמים בלתי תלויים

**רקע:**

**מטרה:** לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

**האומד נקודתי:**  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

**התנאים לבניית רווח הסמך:**

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$2. X_1, X_2 \sim N$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

**השונות המשוקללת:** כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השוננויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השוננויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

**דרגות החופש:**  $d.f = n_1 + n_2 - 2$

**רווח סמך:**

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$  לא קיים הבדל בין התוחלות.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

באר שבע	תל אביב	
10	20	מספר האקדמאים
9500	11,000	ממוצע הכנסות של אקדמאים
250	200	סטיית התקן של הכנסות אקדמאים

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.  
 הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.  
 פתרון : (1357,1643)

**תרגילים:**

1. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים.

כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2. להלן 4 תצפיות על משתנה  $X$  שמתפלג  $N(\mu_x, \sigma^2)$  ומשתנה  $Y$  שמתפלג  $N(\mu_y, \sigma^2)$ .

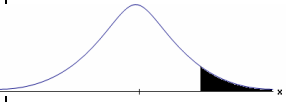
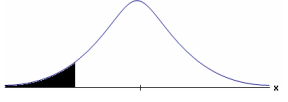
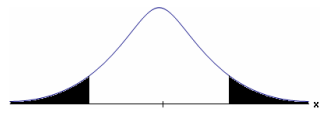
	25	21	20	22	X
	12	17	25	18	Y

חשבו רווח סמך ל-  $\mu_y - \mu_x$  ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## פרק 49 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

כאשר שונות האוכלוסייה ידועה

### רקע:

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס:</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			<b>תנאים:</b>
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את $H_0$	<b>כלל ההכרעה:</b> אזור הדחייה של $H_0$ :

**סטטיסטי המבחן:**

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
--	--	--	---

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדוק את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**תרגילים:**

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
4. המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ושימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
5. לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6. במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחר בתשובה הנכונה.
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
  - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
7. חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.
- אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח: (בחר בתשובה הנכונה)
- השערת האפס הייתה נדחית.
  - השערת האפס הייתה לא נדחית.
  - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
8. שני סטטיסטיקאים בדקו השערות  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$  עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות. שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.
- אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
  - אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.



**פתרונות :****שאלה 1:**

נקבל  $H_0$

**שאלה 2:**

נדחה  $H_0$

**שאלה 3:**

נדחה  $H_0$

**שאלה 4:**

נדחה  $H_0$

**שאלה 5:**

נקבל  $H_0$

**שאלה 6:**

א

**שאלה 7:**

ג

**שאלה 8:**

א. אותה מסקנה

ב. לא ניתן לדעת.

## סיכוי לטעויות ועוצמה כאשר שונות האוכלוסייה ידועה

רקע:

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות)

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_1 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(1 - \alpha) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$\pi = (1 - \beta) = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0)$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
3. $\sigma$ ידועה			<b>תנאים :</b>
4. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	<b>כלל ההכרעה :</b> אזור הדחייה של $H_0$ :
$P_{H_1}(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1}(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1}(\mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	<b>חישוב <math>\beta</math> :</b>

התפלגות ממוצע המדגם :  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} : \text{התקנון}$$

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

**תרגילים:**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

1. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$  להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר  $\mu$  :
- $$H_0 : \mu = 5$$
- $$H_1 : \mu = 7$$
- מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של  $X$  שידגם נדחית השערת  $H_0$  ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש  $X = 6.9$  מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?
2. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א?
3. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת :
- $$H_0 : \mu = 200$$
- $$H_1 : \mu \neq 200$$
- $$\sigma = 30$$
- $$n = 225$$
- א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבר ללא חישוב איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהייה 5%?
4. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודים את קוטרם,

בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

- א. רשום את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

5. להלן השערות של מחקר

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu = 58$$

- מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
1. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
  2. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב בררתיות. בחר בכל שאלה את התשובה הנכונה ביותר:

6. אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א ו-ב נכונות.

7. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

8. מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	$\alpha$
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

9. נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית

$H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

א. הן  $\alpha$ , והן  $(1 - \beta)$ , יקטנו.

ב.  $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $(1 - \beta)$  יגדל.

ג.  $\alpha$  יגדל ואילו  $(1 - \beta)$  יקטן.

ד. הן  $\alpha$  והן  $(1 - \beta)$  יגדלו.

10. ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב

עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים

וקיבל ממוצע 137.

על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב

העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה ?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. מעל 6.645

ב. 0.3632

**שאלה 2:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 2.24$ ב. נדחה  $H_0$ 

ג. 1

**שאלה 3:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} > 203.29$  או  $\bar{X} < 196.71$ 

ב. 0.8051

ג. תקטן.

**שאלה 4:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 48.9$ 

ב. 0.0885

ג. תקטן.

ד. תקטן.

**שאלה 6:**

ד

**שאלה 7:**

ג

**שאלה 8:**

ג

**שאלה 9:**

א

**שאלה 10:**

ב



**קביעת גודל מדגם כששונות האוכלוסייה ידועה**

**רקע:**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1$$

השערות המחקר הן :

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה  $\sigma$  ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.

נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 17$ .

כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

### תרגילים:

1. במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2. משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?)

$$3. \quad \begin{aligned} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{aligned} \quad \text{השערות המחקר הן :}$$

כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה  $\sigma$  מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הוכח שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

**פתרונות :**

**שאלה 1:**

41

**שאלה 2 :**

78

**שאלה 3:**

הוכחה

## מובהקות התוצאה ( p-value ) בבדיקת השערות על תוחלת עם שונות ידועה

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב-  $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
תנאים:	.5 $\sigma$ ידועה			
	.6 $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
p-value	$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

כאשר בהנחת השערת האפס:  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**תרגילים:**

1. לפניך השערות של מחקר :

$$H_0 : \mu = 70$$

$$H_1 : \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות :

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 74$$

מהי מובהקות התוצאה?

2. השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3. אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ – 100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4. מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5. אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאוד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון? לא נכון? נמק.

6. בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value}=0.02$ .  
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה.  
א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7. מובהקות התוצאה (PV) היא גם : ( בחר בתשובה הנכונה )  
א. רמת המובהקות המינימלית לדחות השערת האפס.  
ב. רמת המובהקות המקסימלית לדחיית השערת האפס.  
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.  
ד. רמת המובהקות המינימלית לאי דחיית השערת האפס.

8. בבדיקת השערות מסוימת התקבל  $p\text{ value}=0.0254$  לכן (בחר בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

0.0228

**שאלה 2:**

עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**שאלה 3:**

ב. 0.1056

ג. 0.1056

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**שאלה 4:**

א. 0.0006

ב. יקטן.

ג. נכריע שאין כיוול.

**שאלה 5:**

נכון

**שאלה 6:**

תשובה: א

**שאלה 7:**

תשובה: א


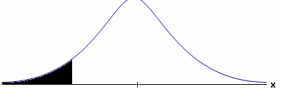
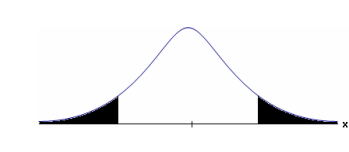
**שאלה 8:**

תשובה: ג



בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כאשר שונות האוכלוסייה אינה ידועה

**רקע:**

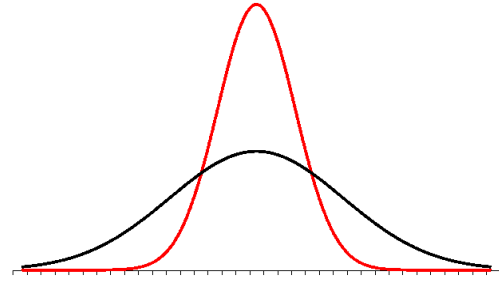
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
7. $\sigma$ אינה ידועה			<b>תנאים :</b>
8. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	<b>כלל ההכרעה :</b> אזור הדחייה של $H_0$
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	<b>חלופה לכלל הכרעה :</b> נדחה $H_0$ אם מתקיים:

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**התפלגות T:**



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

- מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ.  
 כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.  
 א. מהן השערות המחקר?  
 ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?  
 ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

**תרגילים:**

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2. משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מבארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

5. ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.

ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ .

רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ .

מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_0 : \mu < \mu_0$$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.

בחר בתשובה הנכונה :

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

### פתרונות:

**שאלה 1:** $H_0$  נדחה**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נקבל**שאלה 4:** $H_0$  נקבל**שאלה 5:**

התשובה היא : ב

**שאלה 6:**

התשובה היא : ג

### מובהקות התוצאה ( p-value ) כאשר שונות האוכלוסייה לא ידועה

#### רקע:

נוכיר שהמסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא :

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את $H_0$
-------------------------------------

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס :		השערה אלטרנטיבה :	
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	
9. $\sigma$ אינה ידועה			תנאים :
10. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n - 1$$

**דוגמה** : (פתרון בהקלטה)

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם : 27,34,32,40,30 . הנח שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשום את השערות המחקר.

ב. מצא חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% ?

### תרגילים :

1. קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים :
- $$1008, 1024, 996, 1005, 997$$
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.  
 ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
2. חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.  
 מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר ?
3. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית . במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות :
- $$\bar{x} = 176.2$$
- $$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$
- מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6% ?



**פתרונות :**

**שאלה 3:**

נקבל  $H_0$

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל  $\mu$ :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$$H_0 : \mu = 80$$

$$H_1 : \mu \neq 80$$

$$\alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**תרגילים :**

1. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = 90$$

$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא : (87,97).  
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

2. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.  
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסייה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

3. יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצלין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

**פתרונות :****שאלה 1:**

1. נקבל השערת  $H_0$

**שאלה 2:**

א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**שאלה 3:**

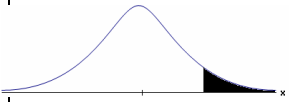
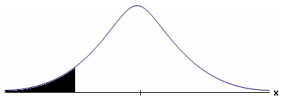

א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

## פרק 50 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות

רקע:

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	<b>השערת האפס:</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
1. מדגמים בלתי תלויים 2. $\sigma_1, \sigma_2$ ידועות 3. $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים			<b>תנאים:</b>
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את $H_0$	<b>כלל הכרעה:</b> אזור הדחייה של $H_0$ :

סטטיסטי המבחן:

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
---	---	--	---

התפלגות הפרש הממוצעים:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

התקנון:

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

**דוגמה : (פתרון בהקלטה)**

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

### תרגילים :

1. מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.  
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.  
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.  
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
2. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
3. במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.  
א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.  
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
4. במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע.  
מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים. ו-12 ס"מ אצל הגברים.  
א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?  
ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

**פתרונות:****שאלה 1:**נדחה  $H_0$ **שאלה 2:**לא נדחה את  $H_0$ **שאלה 3:**

א. 0

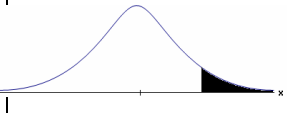
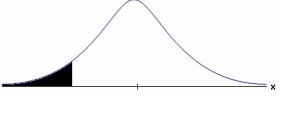
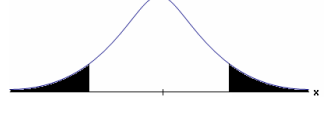
ב. נדחה  $H_0$ **שאלה 4:**א. נדחה  $H_0$  אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.

ב. 0.6331



כששונות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות

**רקע:**

$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
4. מדגמים בלתי תלויים 5. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות 6. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית			<b>תנאים:</b>
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	<b>אזור הדחייה של <math>H_0</math> :</b>

**סטטיסטי המבחן :**

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{השונות המשוקללת} \quad t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ <b>או</b> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
---	---	---	---

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים.

לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש.

**להלן תוצאות המדגם:**

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומדן חסר הטיה לשונות  $S^2 = 200$ .

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומדן חסר הטיה לשונות  $S^2 = 260$ .

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

**תרגילים:**

1. להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (מטרים רבועים):

120	94	90	130	95	112	120	<b>2012</b>
	69	74	105	91	82	100	<b>2013</b>

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%. הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3. להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

1-100W	2-60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	S
15	13	n

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות במוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות במוצע יותר מאשר נורות מסוג W100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ-1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

**פתרונות :****שאלה 1:**

לא נדחה  $H_0$

**שאלה 2:****שאלה 3:**

א. נדחה  $H_0$

ב. רמות מובהקות של לפחות 5%

ג. לא נדחה  $H_0$

## פרק 51 - מבחני טיב ההתאמה

### מבחן טיב התאמה

#### רקע:

מבחן זה הוא מבחן הבא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

#### מבנה המבחן:

#### השערות:

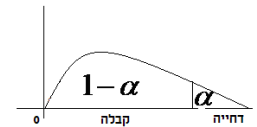
$H_0$ : המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת

$H_1$ : אחרת

#### כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש.

כאשר  $d.f = K - 1$ , מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא:  $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$ , כלומר האחוזון ה- $1 - \alpha$  בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן  $K - 1$ .

אם  $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$ , דוחים את השערת האפס.

#### סטטיסטי המבחן:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$O_i$  - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה  $i$ .

$p_i$  - הסתברות לקטגוריה  $i$  לפי השערת האפס.

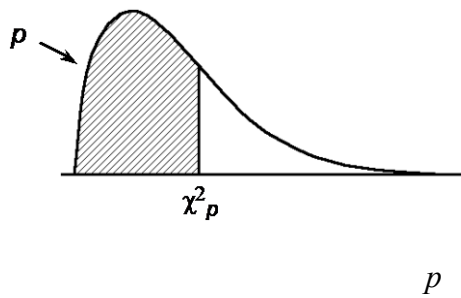
$E_i = np_i$  שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה  $i$  בהנחת השערת האפס.

הערה: תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד

קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C. לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים. בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C. האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0 <sup>4</sup> 393	0.0 <sup>3</sup> 157	0.0 <sup>3</sup> 982	0.0 <sup>2</sup> 393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

### תרגילים:

1. במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו- 17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
2. מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
3. משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.
- א. על סמך תוצאות המדגם האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשדר החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.
4. 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
- 18 איש בחרו בספרה 0  
 24 איש בחרו בספרה 1  
 17 איש בחרו בספרה 2  
 19 איש בחרו בספרה 3  
 20 איש בחרו בספרה 4  
 18 איש בחרו בספרה 5  
 22 איש בחרו בספרה 6  
 היתר בחרו בספרות 7-9
- א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? רמת מובהקות של 2.5%.
- ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.
- ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי  $\chi^2$ ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?



5. מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים. להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:

מספר הטלות	סכום התוצאות
20	2-5
17	6-8
20	9-10
15	11-12

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%.

6. בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

מספר הסוללות הפגומות	0	1	2	3 ומעלה
שכיחות	276	104	12	8

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

7. מטילים מטבע עד שלראשונה מתקבל "ראש". חוזרים על התהליך 120 פעמים. נסמן ב- $X$  את מספר ההטלות עד קבלת הראש. להלן התוצאות שהתקבלו:

$x$	1	2	3	4	5	6
מספר החזרות על התהליך	54	20	16	22	6	2

א. בהנחה והמטבע הוגן, מהי ההתפלגות של  $X$ ?

ב. בדוק האם המטבע הוגן, על סמך תוצאות המדגם ברמת מובהקות של 5%.

$$H_0 : X \sim N(40, 2^2)$$

$$H_1 : \text{else}$$

תוצאות המדגם הן :

מעל 44	40-44	36-40	מתחת 36	X
2A	45A	50A	3A	מספר הדגימות

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את  $H_0$  ברמת מובהקות של 5%?

**פתרונות:****שאלה 1:**לא נדחה  $H_0$ **שאלה 2:**לא נדחה  $H_0$ **שאלה 3:**א. לא נדחה  $H_0$  ב. (0.14, 0.25)**שאלה 4:**א. לא נדחה  $H_0$  ב. בין 0.95 ל- 0.975 ג. יגדל פי 2. מסקנה לא תשתנה.**שאלה 5:**

נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

**שאלה 6:**

0.005

**שאלה 7:**א.  $X \sim G(0.5)$  ב. נסיק שהמטבע לא הוגן.**שאלה 8:**

14